

Álgebra Universal e Categorias

Exame de recurso (23 de junho de 2017) — duração: 2h30

1. (a) Considere a álgebra $\mathcal{A} = (A; +^{\mathcal{A}})$ de tipo (2), onde $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $+^{\mathcal{A}}$ é a operação binária definida por

$$a +^{\mathcal{A}} b = \text{resto de } a + b \text{ na divisão inteira por } 6, \text{ para quaisquer } a, b \in A.$$

Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Para quaisquer subonjuntos S_1 e S_2 de A, se S_1 e S_2 são subuniversos de $\mathcal{A}$, então $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

(b) Seja $\mathcal{B} = (B; F)$ uma álgebra. Mostre que se S_1 e S_2 são subuniversos de $\mathcal{B}$, então $S_1 \cap S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$.

2. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo. Seja $\alpha : A \times B \to A$ a aplicação definida por $\alpha((a, b)) = a$, para todo $(a, b) \in A \times B$.

   (a) Mostre que α é um homomorfismo sobrejetivo de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$. Justifique que $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})/\ker \alpha \cong A$.

   (b) Mostre que α é um monomorfismo se e só se $\mathcal{B}$ é uma álgebra trivial.

3. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1, 1)$ tal que $A = \{a, b, c, d\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	a	a	a	a

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	a	b	a	b

   (a) Considere as congruências $\theta_1 = \triangle_A \cup \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$ e $\theta_2 = \theta(c, d)$. Mostre que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator.

   (b) Diga, justificando, se existem álgebras não triviais $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tais que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

   (c) A álgebra $\mathcal{A}$ é sudiretamente irredutível? Justifique a sua resposta.

4. Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[loop above, "\mathrm{id}_R"] & \\
P \arrow[loop left, "\mathrm{id}_P"] \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, shift left, "v"] \arrow[rr, shift right, "u"'] \arrow[dr, "g"'] & & Q \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Q"] \arrow[ul, "i"'] \arrow[dl, "j"] \\
& S \arrow[loop below, "\mathrm{id}_S"] \arrow[uu, bend left=90, "h"] &
\end{tikzcd}$$

onde $f = i \circ u = i \circ v = h \circ g$,
$g = j \circ u = j \circ v$,
$i = h \circ j$.

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) Todo o morfismo de $\mathbf{C}$ que é um bimorfismo também é um isomorfismo.

   (b) O par (R, i) é um coigualizador de u e v.

5. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é invertível à esquerda e f é invertível à direita, então f é um bimorfismo.

6. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e A, B e P objetos de $\mathbf{C}$ tais que $\hom(A, B) \neq \emptyset$ e $f : P \to A$ e $g : P \to B$ são morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(P; (f, g))$ é um produto de A e B, então f é invertível à direita.

$(v.s.f.f.)$ →

7. Numa categoria $\mathbf{C}$, considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dd, "f_1"'] & & B_2 \arrow[dl, "g_2"'] \arrow[dd, "h_2"] \\
& C \arrow[dr, "h"] & \\
B_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[rr, "h_1"'] & & D
\end{tikzcd}$$

Mostre que se o diagrama anterior é comutativo, h é um monomorfismo e $(A, (f_1, f_2))$ é um produto fibrado de (g_1, g_2), então $(A, (f_1, f_2))$ é um produto fibrado de (h_1, h_2).

8. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias. Diz-se que um funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *reflete objetos iniciais* se, para todo $I \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$,

$$F(I) \text{ é objeto inicial de } \mathbf{D} \Rightarrow I \text{ é objeto inicial de } \mathbf{C}.$$

Mostre que se F é um funtor fiel e pleno, então F reflete objetos iniciais.

Cotação: 1.(1.5+1.5); 2.(2.0+1.5); 3.(1.5+1.0+1.0); 4.(1.25+1.25); 5.(1.75); 6.(1.75); 7.(2.0); 8.(2.0).