Álgebra Universal e Categorias

Exame de recurso (23 de junho de 2017) - Proposta de resolução — duração: 2h30

1. (a) **Considere a álgebra $\mathcal{A} = (A; +^{\mathcal{A}})$ de tipo (2), onde $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $+^{\mathcal{A}}$ é a operação binária definida por**

$$a +^{\mathcal{A}} b = \textbf{resto de } a + b \textbf{ na divisão inteira por } 6, \textbf{ para quaisquer } a, b \in A.$$

Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Para quaisquer subonjuntos S_1 e S_2 de A, se S_1 e S_2 são subuniversos de $\mathcal{A}$, então $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

Um conjunto S diz-se um subuniverso da álgebra $\mathcal{A} = (A; +^{\mathcal{A}})$ se

- $S \subseteq A$;
- o conjunto S é fechado para a operação de $\mathcal{A}$, i.e., para quaisquer $x, y \in A$,

$$x, y \in S \Rightarrow x +^{\mathcal{A}} y \in S.$$

O conjunto $S_1 = \{0, 2, 4\}$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$. De facto, S_1 é um subconjunto de A e é fechado para a operação $+^{\mathcal{A}}$, uma vez que

- $0 +^{\mathcal{A}} 0 = 2 +^{\mathcal{A}} 4 = 0 \in S_1, \quad 0 +^{\mathcal{A}} 2 = 4 +^{\mathcal{A}} 4 = 2 \in S_1, \quad 0 +^{\mathcal{A}} 4 = 2 +^{\mathcal{A}} 2 = 4 \in S_1$;
- a operação $+^{\mathcal{A}}$ é comutativa.

O conjunto $S_2 = \{0, 3\}$ também é um subuniverso de $\mathcal{A}$. De facto, S_2 é um subconjunto de A e é fechado para a operação $+^{\mathcal{A}}$, pois

- $0 +^{\mathcal{A}} 0 = 3 +^{\mathcal{A}} 3 = 0 \in S_2, \quad 0 +^{\mathcal{A}} 3 = 3 = 3 +^{\mathcal{A}} 0 \in S_2$.

O conjunto $S_1 \cup S_2 = \{0, 2, 3, 4\}$ não é um subuniverso de $\mathcal{A}$, uma vez que não é fechado para a operação $+^{\mathcal{A}}$: $2, 3 \in S_1 \cup S_2$, mas $2 +^{\mathcal{A}} 3 = 1 \notin S_1 \cup S_2$.

Logo a afirmação indicada é falsa, pois S_1 e S_2 são subuniversos de $\mathcal{A}$, mas $S_1 \cup S_2$ não é subuniverso de $\mathcal{A}$.

(b) **Seja $\mathcal{B} = (B; F)$ uma álgebra. Mostre que se S_1 e S_2 são subuniversos de $\mathcal{B}$, então $S_1 \cap S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$.**

Seja $\mathcal{B} = (B; F)$ uma álgebra. Um subconjunto S de B diz-se um subuniverso de $\mathcal{B}$ se as seguintes condições são satisfeitas

- $S \subseteq B$;
- para qualquer símbolo de operação n-ário f e para quaisquer $b_1, \ldots, b_n \in B$,

$$b_1, \ldots, b_n \in S \Rightarrow f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots b_n) \in S.$$

Sejam S_1 e S_2 subuniversos de $\mathcal{B}$. Então:

(1) $S_1 \cap S_2 \subseteq B$ (pois $S_1 \subseteq B$ e $S_2 \subseteq B$, uma vez que são subuniversos de $\mathcal{B}$);

(2) para qualquer símbolo de operação n-ário f e para quaisquer $b_1, \ldots, b_n \in S_1 \cap S_2$,

$$\begin{aligned} b_1, \ldots, b_n \in S_1 \cap S_2 &\Rightarrow b_1, \ldots, b_n \in S_1 \text{ e } b_1, \ldots, b_n \in S_2 \\ &\Rightarrow f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) \in S_1 \text{ e } f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) \in S_2 \\ &\qquad\qquad \text{(pois } S_1 \text{ e } S_2 \text{ são fechados para a operação } f^{\mathcal{B}}) \\ &\Rightarrow f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) \in S_1 \cap S_2. \end{aligned}$$

Uma vez que $S_1 \cap S_2$ é um subconjunto de B e é fechado para as operações de $\mathcal{B}$, então $S_1 \cap S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$.

2. **Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo. Seja $\alpha : A \times B \to A$ a aplicação definida por $\alpha((a, b)) = a$, para todo $(a, b) \in A \times B$.**

(a) **Mostre que α é um homomorfismo sobrejetivo de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$. Justifique que $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})/\ker\alpha \cong A$.**

Uma vez que α é uma aplicação de $A \times B$ em A, para provar que α é um homomorfismo de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, resta mostrar que α é compatível com f, para todo o símbolo de operação n-ário f. De facto, dado um símbolo de operação n-ário f e dados $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$, tem-se

$$\begin{array}{rcll} \alpha(f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))) & = & \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)) & (1) \\ & = & f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) & (2) \\ & = & f^{\mathcal{A}}(\alpha(a_1, b_1), \ldots (a_n, b_n)). & (2) \end{array}$$

(1) Por definição de $f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}$. (2) Por definição de α.

Claramente, a aplicação α é sobrejetiva. Uma vez que $B \neq \emptyset$, existe $b \in B$. Logo, para todo $a \in A$, existe $(a, b) \in A \times B$ tal que $\alpha(a, b) = a$.

Atendendo a que $\alpha : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ é um epimorfismo (pois α é um homomorfismo sobrejetivo), pelo Teorema Fundamental do Homomorfismo tem-se $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})/\ker\alpha \cong A$.

(b) **Mostre que α é um monomorfismo se e só se $\mathcal{B}$ é uma álgebra trivial.**

A aplicação α é um monomorfismo se α é um homomorfismo injetivo. A álgebra $\mathcal{B}$ é trivial se $|B| = 1$.

($\Rightarrow$) Admitamos que a álgebra $\mathcal{B}$ não é trivial. Então existem $b_1, b_2 \in B$ tais que $b_1 \neq b_2$. Uma vez que $A \neq \emptyset$, existe $a \in A$. Logo existem $(a, b_1), (a, b_2) \in A \times B$ tais que $(a, b_1) \neq (a, b_2)$ e $\alpha(a, b_1) = a = \alpha(a, b_2)$. Por conseguinte, a aplicação α não é um homomorfismo injetivo.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\mathcal{B}$ é uma álgebra trivial; seja b o único elemento de B. Então, para quaisquer $(a_1, b), (a_2, b) \in A \times B$,

$$\begin{array}{rcl} \alpha(a_1, b) = \alpha(a_2, b) & \Rightarrow & a_1 = a_2 \\ & \Rightarrow & (a_1, b) = (a_2, b). \end{array}$$

Logo a aplicação α é injetiva. Uma vez que da alínea anterior sabe-se que α é um homomorfismo, então α é um monomorfismo.

3. **Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1, 1)$ tal que $A = \{a, b, c, d\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por**

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	a	a	a	a

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	a	b	a	b

(a) **Considere as congruências $\theta_1 = \triangle_A \cup \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$ e $\theta_2 = \theta(c, d)$. Mostre que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator.**

O par (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator se $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$, $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_A$ e $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$.

No sentido de mostrar que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator, comecemos por determinar θ_2.

Dada uma álgebra $\mathcal{B} = (B; F)$ de tipo (O, τ), diz-se que uma relação binária em B é uma congruência em $\mathcal{B}$ se θ é uma relação de equivalência em B que satisfaz a propriedade de substituição, i.e., se θ é uma relação de equivalência em B tal que, para qualquer símbolo de operação n-ário $h \in O$ e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots b_n \in B$,

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \theta \Rightarrow (h^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n), h^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta.$$

Dado $X \subseteq B^2$, representa-se por $\theta(X)$ a menor congruência em $\mathcal{B}$ que contém X.

Uma vez que $\theta_2 = \theta(c, d)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(c, d)\}$ segue que

- $(c, d) \in \theta_2$;
- $(d, c) \in \theta_2$ (pois θ_2 é simétrica);
- $\triangle_A \subseteq \theta_2$ (pois θ_2 é reflexiva);
- $(f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}}(d)) = (a, a), (f^{\mathcal{A}}(d), f^{\mathcal{A}}(c)) = (a, a) \in \theta_2$ (pela propriedade de substituição);
- $(g^{\mathcal{A}}(c), g^{\mathcal{A}}(d)) = (a, b), (g^{\mathcal{A}}(d), g^{\mathcal{A}}(c)) = (b, a) \in \theta_2$ (pela propriedade de substituição);
- $(f^{\mathcal{A}}(a), f^{\mathcal{A}}(b)) = (a, a), (f^{\mathcal{A}}(b), f^{\mathcal{A}}(a)) = (a, a) \in \theta_2$ (pela propriedade de substituição);
- $(g^{\mathcal{A}}(a), g^{\mathcal{A}}(b)) = (a, b), (g^{\mathcal{A}}(b), g^{\mathcal{A}}(a)) = (b, a) \in \theta_2$ (pela propriedade de substituição).

Logo $\triangle_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\} \subseteq \theta_2$.

A relação $\theta = \triangle_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$ é uma congruência em $\mathcal{A}$ (pois é uma relação de equivalência que satisfaz a propriedade de substituição) e contém $\{(a, b)\}$. Mas $\theta_2 = \theta(a, b)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a, b)\}$. Logo $\theta_2 = \theta(a, b) \subseteq \theta$.

Assim, $\theta_2 = \theta = \triangle_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$.

O par (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator, pois

- $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$;
- $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup \theta_2 \cup \{(a,d),(d,a),(b,c),(c,b)\} = \nabla_A$;
- $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_1 \cup \theta_2 \cup \{(a,d),(d,a),(b,c),(c,b)\} = \theta_2 \circ \theta_1$.

(b) **Diga, justificando, se existem álgebras não triviais $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tais que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$.**

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponivel se sempre que $A \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ (onde $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são álgebras do mesmo tipo da álgebra $\mathcal{A}$), então $\mathcal{B}$ é a álgebra trivial ou $\mathcal{C}$ é a álgebra trivial. As álgebras diretamente indecomponíveis podem ser caracterizadas da seguinte forma: uma álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível se e só se as únicas congruências fator de $\mathcal{A}$ são as congruências ∇_A e $\triangle_A$. Da alínea anterior sabe-se que que θ_1 e θ_2 são congruências fator de $\mathcal{A}$. Uma vez que $\theta_1, \theta_2 \notin \{\triangle_A, \nabla_A\}$, então $\triangle_A$ e ∇_A não são as únicas congruências fator de $\mathcal{A}$. Logo a álgebra $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível e, portanto, existem álgebras não triviais $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tais que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

(c) **A álgebra $\mathcal{A}$ é sudiretamente irredutível? Justifique a sua resposta.**

Toda a álgebra sudiretamente irredutível é diretamente indecomponível. Uma vez que $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível, então $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

4. **Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama seguinte**

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[loop above, "\mathrm{id}_R"] & \\
P \arrow[loop left, "\mathrm{id}_P"] \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, shift left, "v"] \arrow[rr, shift right, "u"'] \arrow[dr, "g"'] & & Q \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Q"] \arrow[ul, "i"'] \arrow[dl, "j"] \\
 & S \arrow[loop below, "\mathrm{id}_S"] \arrow[uu, bend left=90, "h"] &
\end{tikzcd}$$

onde $f = i \circ u = i \circ v = h \circ g$,
$g = j \circ u = j \circ v$,
$i = h \circ j$.

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) **Todo o morfismo de $\mathbf{C}$ que é um bimorfismo também é um isomorfismo.**

A afirmação é falsa.

Um morfismo $p : X \to Y$ diz-se um bimorfismo se é simultaneamente um epimorfismo e um monomorfismo. Um morfismo $p : X \to Y$ diz-se um isomorfismo se existe um morfismo $p' : Y \to X$ tal que $p \circ p' = \mathrm{id}_Y$ e $p' \circ p = \mathrm{id}_X$.

O $\mathbf{C}$-morfismo $f : P \to R$ é um monomorfismo, pois, para quaisquer $i_1, i_2 : X \to P$,

$$f \circ i_1 = f \circ i_2 \Rightarrow i_1 = i_2 = \mathrm{id}_P.$$

O $\mathbf{C}$-morfismo $f : P \to R$ também é um epimorfismo, uma vez que, para quaisquer $j_1, j_2 : P \to X$,

$$j_1 \circ f = j_2 \circ f \Rightarrow j_1 = j_2 = \mathrm{id}_R.$$

Logo f é um bimorfismo. No entanto, f não é um isomorfismo, uma vez que não existe qualquer morfismo $f' : R \to P$ tal que $f \circ f' = \mathrm{id}_R$ e $f' \circ f = \mathrm{id}_P$.

(b) **O par (R, i) é um coigualizador de u e v.**

A afirmação é falsa.

O par (R, i) é um coigualizador de u e v se as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $i \circ u = i \circ v$;

(2) para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $r : Q \to X$ tal que $r \circ u = r \circ v$, existe um, e um só, $\mathbf{C}$-morfismo $s : R \to X$ tal que $s \circ i = r$.

Ora, atendendo a que $j : Q \to S$ é um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $j \circ u = j \circ v$ e não existe qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $s : R \to S$ tal que $s \circ i = j$, concluímos que a condição (2) não é satisfeita e, portanto, o par (R, i) não é um coigualizador de u e v.

5. **Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é invertível à esquerda e f é invertível à direita, então f é um bimorfismo.**

   Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ $\mathbf{C}$-morfismos em $\mathbf{C}$ tais que $g \circ f$ é invertível à esquerda e f é invertível à direita. Pretende-se mostrar que f é um bimorfismo, isto é, pretende-se provar que f é um monomorfismo e um epimorfismo.

   O morfismo f é um monomorfismo se, para quaisquer morfismos $i_1, i_2 : D \to A$,

$$f \circ i_1 = f \circ i_2 \Rightarrow i_1 = i_2.$$

   O morfismo f é um epimorfismo se, para quaisquer morfismos $j_1, j_2 : B \to E$,

$$j_1 \circ f = j_2 \circ f \Rightarrow j_1 = j_2.$$

   Um vez que f é invertível à direita, existe um morfismo $f' : B \to A$ tal que $f \circ f' = \mathrm{id}_B$. Logo, para quaisquer morfismos $j_1, j_2 : B \to E$

$$\begin{array}{rcl} j_1 \circ f = j_2 \circ f & \Rightarrow & (j_1 \circ f) \circ f' = (j_2 \circ f) \circ f' \\ & \Rightarrow & j_1 \circ (f \circ f') = j_2 \circ (f \circ f') \\ & \Rightarrow & j_1 \circ \mathrm{id}_B = j_2 \circ \mathrm{id}_B \\ & \Rightarrow & j_1 = j_2. \end{array}$$

   Logo f é um epimorfismo.

   Atendendo a que $g \circ f$ é invertível à esquerda, existe um morfismo $h : C \to A$ tal que $h \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_A$. Então, para quaisquer morfismos $i_1, i_2 : D \to A$,

$$\begin{array}{rcl} f \circ i_1 = f \circ i_2 & \Rightarrow & (h \circ g) \circ (f \circ i_1) = (h \circ g) \circ (f \circ i_2) \\ & \Rightarrow & (h \circ g \circ f) \circ i_1 = (h \circ g \circ f) \circ i_2 \\ & \Rightarrow & \mathrm{id}_A \circ i_1 = \mathrm{id}_A \circ i_2 \\ & \Rightarrow & i_1 = i_2. \end{array}$$

   Logo f é um monomorfismo.

   Desta forma, provámos que f é um monomorfismo e um epimorfismo e, portanto, f é um bimorfismo.

6. **Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e A, B e P objetos de $\mathbf{C}$ tais que $\hom(A, B) \neq \emptyset$ e $f : P \to A$ e $g : P \to B$ são morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(P; (f, g))$ é um produto de A e B, então f é invertível à direita.**

   Seja $(P; (f, g))$ um produto de A e B. Pretende-se mostrar que f é invertível à direita, isto é, pretende-se provar que existe um morfismo $f' : B \to A$ tal que $f \circ f' = \mathrm{id}_A$.

   Uma vez que $\hom(A, B) \neq \emptyset$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $h : A \to B$. Atendendo a que $\mathbf{C}$ é uma categoria e A é um objeto de $\mathbf{C}$, $\mathrm{id}_A : A \to A$ é um morfismo de $\mathbf{C}$. Assim, tem-se o seguinte diagrama em $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "h"] & \\ A & P \arrow[l, "f"] \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

   Uma vez que $(P, (f, g))$ é um produto de A e B, então existe um, e um só, $\mathbf{C}$-morfismo $u : A \to P$ tal que $f \circ u = \mathrm{id}_A$ e $g \circ u = h$. Dado que existe o morfismo $u : A \to P$ tal que $f \circ u = \mathrm{id}_A$, conclui-se que f é invertível à dieita.

7. **Numa categoria $\mathbf{C}$, considere o seguinte diagrama**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dd, "f_1"'] & & B_2 \arrow[dl, "g_2"'] \arrow[dd, "h_2"] \\ & C \arrow[dr, "h"] & \\ B_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[rr, "h_1"'] & & D \end{tikzcd}$$

Mostre que se o diagrama anterior é comutativo, h é um monomorfismo e $(A,(f_1,f_2))$ é um produto fibrado de (g_1,g_2), então $(A,(f_1,f_2))$ é um produto fibrado de (h_1,h_2).

Admitamos que $(A,(f_1,f_2))$ é um produto fibrado de (g_1,g_2). Então:

(1) $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$;

(2) para qualquer objeto X e para quaisquer morfismos $u_1 : X \to B_1$ e $u_2 : X \to B_2$, se $g_1 \circ u_1 = g_2 \circ u_2$, então existe um, e um só, morfismo $u : X \to A$ tal que $f_1 \circ u = u_1$ e $f_2 \circ u = u_2$.

Pretende-se mostrar que $(A,(f_1,f_2))$ é um produto fibrado de (h_1,h_2). Isto é, pretende-se provar que

(3) $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$;

(4) para qualquer objeto Y e para quaisquer morfismos $v_1 : Y \to B_1$ e $v_2 : Y \to B_2$, se $h_1 \circ v_1 = h_2 \circ v_2$, então existe um, e um só, morfismo $v : Y \to A$ tal que $f_1 \circ v = v_1$ e $f_2 \circ v = v_2$.

De (1) e (2) é imediata a prova de (3) e (4). De facto:

(3) Uma vez que $h_1 \circ f_1$ e $h_2 \circ f_2$ são morfismos com o mesmo domínio e com o mesmo codomínio e o diagrama anterior é comutativo, é imediato que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$.

(4) Sejam Y um objeto de $\mathbf{C}$ e $v_1 : Y \to B_1$, $v_2 : Y \to B_2$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $h_1 \circ v_1 = h_2 \circ v_2$. Então, atendendo a que $h_1 = h \circ g_1$ e $h_2 = h \circ g_2$ (pois o diagrama é comutativo), tem-se

$$h \circ g_1 \circ v_1 = h \circ g_2 \circ v_2.$$

Logo, como h é monomorfismo, vem que

$$g_1 \circ v_1 = g_2 \circ v_2.$$

Assim, atendendo a (2), conclui-se que existe um, e um só, morfismo $v : Y \to A$ tal que $f_1 \circ v = v_1$ e $f_2 \circ v = v_2$.

8. **Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias. Diz-se que um funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ reflete objetos iniciais se, para todo $I \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$,**

$$F(I) \text{ **é objeto inicial de** } \mathbf{D} \Rightarrow I \text{ **é objeto inicial de** } \mathbf{C}.$$

Mostre que se F é um funtor fiel e pleno, então F reflete objetos iniciais.

Sejam F um funtor fiel e pleno e I um objeto de $\mathbf{C}$ tal que $F(I)$ é um objeto inicial de $\mathbf{D}$. Pretende-se mostrar que I é um objeto inicial de $\mathbf{D}$, isto é, pretende-se mostrar que, para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$, existe um, e um só, $\mathbf{C}$-morfismo de I em X.

Seja X um objeto de $\mathbf{C}$. Logo $F(X)$ é um objeto de $\mathbf{D}$. Uma vez que $F(I)$ é um objeto inicial de $\mathbf{D}$, existe um, e um só, $\mathbf{D}$-morfismo $g : F(I) \to F(X)$. Então, atendendo a que F é pleno, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f : I \to X$ tal que $F(f) = g$. Assim, para qualquer $\mathbf{C}$-objeto X, existe um $\mathbf{C}$-morfismo de I em X. Resta mostrar que existe, no máximo, um $\mathbf{C}$-morfismo de I em X. De facto, se assumirmos que $f_1 : I \to X$ e $f_2 : I \to X$ são $\mathbf{C}$-morfismos, tem-se que $F(f_1) : F(I) \to F(X)$ e $F(f_2) : F(I) \to F(X)$ são $\mathbf{D}$-morfismos. Logo, como $F(I)$ é um objeto inicial de $\mathbf{D}$, vem que $F(f) = F(g)$ (pois existe um único $\mathbf{D}$-morfismo de $F(I)$ em $F(X)$). Desta última igualdade segue que $f_1 = f_2$, uma vez que F é fiel. Desta forma, provámos que, para qualquer $\mathbf{C}$-objeto X, existe um, e um só, $\mathbf{C}$-morfismo de I em X, isto é, mostrámos que I é um objeto inicial de $\mathbf{C}$.

Cotação: 1.(1.5+1.5); 2.(2.0+1.5); 3.(1.5+1.0+1.0); 4.(1.25+1.25); 5.(1.75); 6.(1.75); 7.(2.0); 8.(2.0).