Universidade do Minho — Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações — 2016/2017

Álgebra Universal e Categorias

2º teste (9 de junho de 2017) — duração: 2 horas

1. Considere a categoria $\mathbf{C}$ definida por

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[l, "j"'] \arrow[r, "h"] \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] \arrow[rr, bend right, "i"'] & C \arrow[ll, bend right, "k"'] \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "f"'] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_C"] & D \arrow[loop right, "\mathrm{id}_D"]
\end{tikzcd}
$$

onde $i = f \circ h = g \circ h$, $j = k \circ h$.

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) Para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $p : X \to Y$ e $q : Y \to Z$, se p não é um epimorfismo, então $q \circ p$ não é um epimorfismo.

(b) Para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$, se X não é um objeto terminal da categoria $\mathbf{C}$, então (X, id_X) não é um objeto terminal da categoria $\mathbf{C}/A$. (Nota: Representa-se por $\mathbf{C}/A$ a categoria dos objetos sobre A).

(c) O par $(C, (\mathrm{id}_C, f))$ é um produto de C e D.

2. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é invertível à direita, então g é um epimorfismo.

3. Mostre que se $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são categorias com objetos terminais, então a categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ também tem objetos terminais. Conclua que a categoria **Set** $\times$ **Set** tem objetos terminais. Dê um exemplo de um objeto terminal da categoria **Set** $\times$ **Set**. Justifique a sua resposta.

4. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$ tais que $f \circ g = id_B$. Mostre que (B, f) é um coigualizador de $g \circ f$ e id_A.

5. Numa categoria $\mathbf{C}$, considere o seguinte diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dd, "f_1"'] & & B_2 \arrow[dl, "g_2"'] \arrow[dd, "h_2"] \\
& C \arrow[dr, "h"] & \\
B_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[rr, "h_1"'] & & D
\end{tikzcd}
$$

Mostre que se o diagrama anterior é comutativo e $(A, (f_1, f_2))$ é um produto fibrado de (h_1, h_2), então $(A, (f_1, f_2))$ é um produto fibrado de (g_1, g_2).

6. Sejam X um conjunto e F_X a correspondência que

- a cada conjunto A associa o conjunto $F_X(A) = A \times X$;
- a cada função $f : A \to B$ associa a função

$$
\begin{array}{rccc}
F_X(f): & A \times X & \to & B \times X \\
 & (a, x) & \mapsto & (f(a), x)
\end{array}.
$$

(a) Mostre que, para qualquer conjunto X, F_X é um funtor de **Set** em **Set**.

(b) Diga, justificando, se o funtor F_X é um funtor fiel quando: (i) $X = \emptyset$. (ii) $X \neq \emptyset$.

Cotação: 1.(2.0+2.0+2.0); 2.(2.5); 3.(2.5); 4.(2.5); 5.(2.5); 6.(2.0+2.0).