Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação
2016/2017

Álgebra Universal e Categorias

2º teste (9 de junho de 2017) — duração: 2 horas

1. **Considere a categoria $\mathbf{C}$ definida por**

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[l, "j"'] \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "i"'] \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] & C \arrow[ll, bend right, "k"'] \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "f"'] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_C"] & D \arrow[loop right, "\mathrm{id}_D"]
\end{tikzcd}$$

onde $i = f \circ h = g \circ h$, $j = k \circ h$.

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) **Para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $p : X \to Y$ e $q : Y \to Z$, se p não é um epimorfismo, então $q \circ p$ não é um epimorfismo**

Um $\mathbf{C}$-morfismo $r : X \to Y$ diz-se um epimorfismo se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $s, t : Y \to W$,

$$s \circ r = t \circ r \Rightarrow s = t.$$

Claramente, o $\mathbf{C}$-morfismo h não é um epimorfismo, pois

$$f \circ h = g \circ h \text{ e } f \neq g.$$

No entanto, o $\mathbf{C}$-morfismo $i = f \circ h$ é um epimorfismo. De facto, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $s, t : D \to W$,

$$s \circ i = t \circ i \Rightarrow s = \mathrm{id}_D = t,$$

uma vez que id_D é o único $\mathbf{C}$-morfismo com domínio D.

Logo a afirmação é falsa, pois h não é um epimorfismo, mas $f \circ h$ é um epimorfismo.

(b) **Para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$, se X não é um objeto terminal de $\mathbf{C}$, então (X, id_X) não é um objeto terminal da categoria $\mathbf{C}/A$ dos objetos sobre A.**

Sendo $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \hom_{\mathbf{C}}, \mathrm{id}^{\mathbf{C}}, \circ^{\mathbf{C}})$ a categoria dada no enunciado, a categoria dos objetos sobre A é a categoria $\mathbf{C}/A = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}/A), \hom, \mathrm{id}^{\mathbf{C}/A}, \circ^{\mathbf{C}/A})$ tal que

- os objetos de $\mathbf{C}/A$ são todos os pares (X, f), onde X é um objeto de $\mathbf{C}$ e $f : X \to D$ é um morfismo de $\mathbf{C}$;
- dados objetos (X, f) e (Y, g) de $\mathbf{C}/A$, um $\mathbf{C}/A$-morfismo de (X, f) em (Y, g) é um $\mathbf{C}$-morfismo $j : X \to Y$ tal que $g \circ^{\mathbf{C}} j = f$;
- para cada objeto (X, f) de $\mathbf{C}/A$, o morfismo identidade $\mathrm{id}^{\mathbf{C}/A}_{(X,f)}$ é o $\mathbf{C}$-morfismo $\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_X : X \to X$;
- dados morfismos $j : (X, f) \to (Y, g)$ e $k : (Y, g) \to (Z, h)$ a sua composição $k \circ^{\mathbf{C}/A} j : (X, f) \to (Z, h)$ é o $\mathbf{C}$-morfismo $k \circ^{\mathbf{C}} j : X \to Z$.

Ou seja, $\mathbf{C}/A$ é a categoria representada por

$$\begin{tikzcd}
(A, \mathrm{id}_A) \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] & (B, j) \arrow[l, "j"'] \arrow[r, "h"] \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] & (C, k) \arrow[ll, bend left, "k"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_C"]
\end{tikzcd}$$

Um objeto T de uma categoria $\mathbf{D}$ diz-se um objeto terminal se, para qualquer objeto X de $\mathbf{D}$, existe um, e um só, $\mathbf{D}$-morfismo de X em T.

Na categoria $\mathbf{C}$, o objeto A não é terminal, pois D é um objeto de $\mathbf{C}$ e não existe morfismo de D em A.

Na categoria $\mathbf{C}/A$, o objeto (A, id_A) é terminal, pois, para qualquer objeto (X, q) de $\mathbf{C}/A$, existe um, e um só, morfismo de (X, q) em (A, id_A).

Logo a afirmação é falsa, pois A é um objeto de $\mathbf{C}$ que não é objeto terminal, mas (A, id_A) é objeto terminal de $\mathbf{C}/A$.

(c) **O par $(C, (\mathrm{id}_C, f))$ é um produto de C e D.**

O par $(C, (\mathrm{id}_C, f))$ é um produto de C e D se forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) C é um objeto de $\mathbf{C}$;

(ii) id_C é um $\mathbf{C}$-morfismo de C em C e f é um $\mathbf{C}$-morfismo de C em D;

(iii) para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $p : X \to C$ e $q : X \to D$, existe um, e um só, morfismo $u : X \to C$ tal que $\mathrm{id}_C \circ u = p$ e $f \circ u = q$.

Ora, embora as condições (i) e (ii) sejam satisfeitas, verifica-se que a condição (iii) não se verifica. De facto, como $\mathrm{id}_\mathrm{C} : C \to C$ e $g : C \to D$ são morfismos de $\mathbf{C}$, tem-se o seguinte diagrama em $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[dr, "g"] & \\
C & C \arrow[l, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, "f"'] & D
\end{tikzcd}$$

Como id_C é o único morfismo de C em C e $f \circ \mathrm{id}_C \neq g$, concluímos que não existe qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $u : C \to C$ tal que $f \circ u = g$ e $\mathrm{id}_C \circ u = \mathrm{id}_C$. Por conseguinte, $(C, (\mathrm{id}_C, f)$ não é um produto de C e D.

Logo a afirmação é falsa.

2. **Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é invertível à direita, então g é um epimorfismo.**

Um $\mathbf{C}$-morfismo $p : X \to Y$ diz-se invertível à direita se existe um $\mathbf{C}$-morfismo $q : Y \to X$ tal que $p \circ q = \mathrm{id}_Y$.

Um $\mathbf{C}$-morfismo $p : X \to Y$ diz-se um epimorfismo se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i, j : Y \to Z$,

$$i \circ p = j \circ p \Rightarrow i = j.$$

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $g \circ f$ é invertível à direita. Uma vez que $g \circ f : A \to C$ é invertível à direita, então existe um morfismo $h : C \to A$ tal que $(g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_C$.

Sejam $i, j : C \to D$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $i \circ g = j \circ g$. Então

$$(i \circ g) \circ (f \circ h) = (j \circ g) \circ (f \circ h)$$

donde segue que

$$i \circ ((g \circ f) \circ h) = j \circ ((g \circ f) \circ h).$$

Logo

$$i \circ \mathrm{id}_C = j \circ \mathrm{id}_C$$

e, portanto, $i = j$.

Desta forma, provámos que g é um epimorfismo.

3. **Mostre que se $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são categorias com objetos terminais, então a categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ também tem objetos terminais. Conclua que a categoria Set $\times$ Set tem objetos terminais. Dê um exemplo de um objeto terminal de Set $\times$ Set. Justifique a sua resposta.**

   Um objeto T de uma categoria $\mathbf{C}$ diz-se um objeto terminal se, para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$, existe um, e um só, $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to T$.

   Suponhamos que T_1 e T_2 são objetos terminais de $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, respetivamente.

   Facilmente se prova que (T_1, T_2) é um objeto terminal de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$. De facto, como T_1 é um objeto de $\mathbf{C}$ e T_2 é um objeto de $\mathbf{D}$, o par (T_1, T_2) é um objeto de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$. Além disso, para qualquer objeto (X, Y) de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, existe um, e um só, $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2). Com efeito, como X é objeto de $\mathbf{C}$ e T_1 é objeto terminal de $\mathbf{C}$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to T_1$. De modo análogo, como Y é um objeto de $\mathbf{D}$ e T_2 é um objeto terminal de $\mathbf{D}$, existe um $\mathbf{D}$-morfismo $g : Y \to T_2$. Logo existe um $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2): o morfismo (f, g). O morfismo (f, g) é o único $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2). Se admitirmos que (f', g') é um $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2), segue que f' é um $\mathbf{C}$-morfismo de X em T_1 e que g' é um $\mathbf{D}$-morfismo de Y em T_2. Mas f é o único $\mathbf{C}$-morfismo de X em T_1 (pois T_1 é um objeto terminal de $\mathbf{C}$), pelo que $f = f'$. De forma semelhante, conclui-se que $g = g'$ (pois T_2 é um objeto terminal de $\mathbf{D}$). Logo $(f, g) = (f', g')$. Desta forma, provámos que, para qualquer objeto (X, Y) de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, existe um, e um só, $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2).
   Logo (T_1, T_2) é um objeto terminal de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

   A categoria **Set** tem objetos terminais: os conjuntos singulares. Logo, pelo que foi provado anteriormente, a categoria **Set** $\times$ **Set** tem objetos terminais. Uma vez que $\{1\}$ e $\{2\}$ são objetos terminais de **Set**, o par $(\{1\}, \{2\})$ é um objeto terminal de **Set** $\times$ **Set**.

4. **Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$ tais que $f \circ g = id_B$. Mostre que (A, f) é um coigualizador de $g \circ f$ e id_A.**

   Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$ tais que $f \circ g = id_B$. Pretendemos mostrar que (A, f) é um coigualizador de $g \circ f$ e id_A, i.e., pretendemos mostrar que:

   (1) $f \circ (g \circ f) = f \circ \mathrm{id}_A$;

   (2) para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $f' : A \to X$, se $f' \circ (g \circ f) = f' \circ \mathrm{id}_A$, então existe um, e um só morfismo, $u : B \to X$ tal que $u \circ f = f'$.

   Mostremos (1) e (2).

   (1) Uma vez que $f \circ g = id_B$, tem-se

   $$f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f = \mathrm{id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_A.$$

   (2) Seja $f' : A \to X$ um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $f' \circ (g \circ f) = f' \circ \mathrm{id}_A$. Então $f' \circ (g \circ f) = f'$ e, portanto, existe o $\mathbf{C}$-morfismo $u = f' \circ g$ tal que $u \circ f = f'$.

   $$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, shift right, "g \circ f"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & B \arrow[d, "u = f' \circ g"] \\
& & X
\end{tikzcd}$$

   Além disso, o morfismo $f' \circ g$ é o único $\mathbf{C}$-morfismo $u : B \to X$ tal que $u \circ f = f'$. De facto, se $f'' : B \to X$ é um morfismo tal que $f'' \circ f = f'$, tem-se $f'' \circ f \circ g = f' \circ g$, donde segue que $f'' \circ \mathrm{id}_B = f' \circ g$. Logo $f'' = f' \circ g$.

5. **Numa categoria $\mathbf{C}$, considere o seguinte diagrama**

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dd, "f_1"'] & & B_2 \arrow[dl, "g_2"'] \arrow[dd, "h_2"] \\
& C \arrow[dr, "h"] & \\
B_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[rr, "h_1"'] & & D
\end{tikzcd}$$

Mostre que se o diagrama anterior é comutativo e $(A,(f_1,f_2))$ é um produto fibrado de (h_1,h_2), então $(A,(f_1,f_2))$ é um produto fibrado de (g_1,g_2).

Admitamos que o diagrama anterior é comutativo e que $(A,(f_1,f_2))$ é um produto fibrado de (h_1,h_2). Pelo facto de $(A,(f_1,f_2))$ ser um produto fibrado de (h_1,h_2), tem-se que:

(1) $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$;

(2) para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i_1 : X \to B_1$, $i_2 : X \to B_2$, se $h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$, então existe um, e um só, $\mathbf{C}$-morfismo $u : X \to A$ tal que $f_1 \circ u = i_1$ e $f_2 \circ u = i_2$.

Pretende-se mostrar que $(A,(f_1,f_2))$ é um produto fibrado de (g_1,g_2), isto é, pretende-se mostrar que:

(3) $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$;

(4) para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $j_1 : X \to B_1$, $j_2 : X \to B_2$, se $g_1 \circ j_1 = g_2 \circ j_2$, então existe um, e um só, $\mathbf{C}$-morfismo $v : X \to A$ tal que $f_1 \circ v = j_1$ e $f_2 \circ v = j_2$.

Mostremos (3) e (4).

(3) A igualdade $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ é imediata, uma vez que o diagrama anterior é comutativo e $g_1 \circ f_1$ e $g_2 \circ f_2$ são morfismos com o mesmo domínio e o mesmo codomínio.

(4) Sejam $j_1 : X \to B_1$ e $j_2 : X \to B_2$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $g_1 \circ j_1 = g_2 \circ j_2$. Então $h \circ g_1 \circ j_1 = h \circ g_2 \circ j_2$, donde segue que $h_1 \circ j_1 = h_2 \circ j_2$ (note-se que $h \circ g_1 = h_1$ e $h \circ g_2 = h_2$, pois o diagrama é comutativo). Então, atendendo a (2) segue que existe um, e um só, morfismo $v : X \to A$ tal que $f_1 \circ v = j_1$ e $f_2 \circ v = j_2$.

6. **Sejam X um conjunto e F_X a correspondência que**

   - **a cada conjunto A associa o conjunto $F_X(A) = A \times X$;**
   - **a cada função $f : A \to B$ associa a função**

$$F_X(f) : \begin{array}{ccc} A \times X & \to & B \times X \\ (a,x) & \mapsto & (f(a),x) \end{array}.$$

(a) **Mostre que, para qualquer conjunto X, F_X é um funtor de Set em Set.**

Dado um conjunto X, a correspondência F_X é um funtor de **Set** em **Set** se F_X é uma correspondência que a cada objeto A de **Set** associa um objeto de **Set**, a cada morfismo $f : A \to B$ de **Set** associa um morfismo $f(f) : F(A) \to F(B)$ de **Set** e tal que:

- para qualquer objeto A de **Set**, $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$;
- para quaisquer **Set**-morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Facilmente se verifica que F_X é um funtor de **Set** em **Set**. De facto:

(1) Para cada conjunto A de **Set**, $A \times X$ é um conjunto, logo $A \times X$ é um objeto de **Set**. Assim, a cada objeto A de **Set**, a correspondência F_X associa um objeto de **Set**.

(2) Para qualquer função $f : A \to B$, a correspondência $F_X(f)$ é uma função, logo $F_X(f)$ é um morfismo de **Set**. Assim, a cada morfismo $f : A \to B$ de **Set**, a correspondência F_X associa um morfismo $F_X(f) : F_X(A) \to F_X(B)$ de **Set**.

(3) Para qualquer objeto A de **Set**, tem-se $F_X(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F_X(A)}$.

Com efeito, como id_A é a função definida por

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_A : A & \to & A \\ a & \mapsto & a \end{array}$$

da definição de F_X segue que a função $F_X(\mathrm{id}_A)$ é a função dada por

$$\begin{array}{rcl} F_X(\mathrm{id}_A) : A \times X & \to & A \times X \\ (a,x) & \mapsto & (\mathrm{id}_A(a), x) = (a,x) \end{array}.$$

A função $\mathrm{id}_{F_X(A)}$ é a função definida por

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_{F_X(A)} : F_X(A) & \to & F_X(A) \\ u & \mapsto & u \end{array},$$

ou seja, $\mathrm{id}_{F_X(A)}$ é a função

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_{F_X(A)} : A \times X & \to & A \times X \\ (a,x) & \mapsto & (a,x) \end{array}.$$

Obviamente, as funções $F(\mathrm{id}_A)$ e $\mathrm{id}_{F(A)}$ são iguais.

(4) Para quaisquer funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, $F_X(g \circ f) = F_X(g) \circ F_X(f)$.

Por definição de composição de funções, $g \circ f$ é a função definida por

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : A & \to & C \\ a & \mapsto & g(f(a)) \end{array}$$

donde segue que $F_X(g \circ f)$ é a função

$$\begin{array}{rcl} F_X(g \circ f) : A \times X & \to & C \times X \\ (a,x) & \mapsto & (g(f(a)), x) \end{array}$$

Atendendo a que $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, pela definição de F_X temos

$$\begin{array}{rcl} F_X(f) : A \times X & \to & B \times X \\ (a,x) & \mapsto & (f(a), x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} F_X(g) : B \times X & \to & C \times X \\ (b,x) & \mapsto & (g(b), x) \end{array}$$

e por definição de composição de funções segue que

$$\begin{array}{r} F_X(g) \circ F_X(f) : A \times X \to C \times X \\ (a,x) \mapsto (F_X(g) \circ F_X(f))(a,x) \end{array}$$

onde

$$(F_X(g) \circ F_X(f))(a,x) = F_X(g)(F_X(f)(a,x)) = F_X(g)(f(a),x) = (g(f(a)),x).$$

Claramente, as funções $F_X(g \circ f)$ e $F_X(g) \circ F_X(f)$ são iguais.

(b) **Diga, justificando, se o funtor F_X é um funtor fiel quando: (i) $X = \emptyset$. (ii) $X \neq \emptyset$.**

Dado um conjunto X, o funtor F_X é fiel se, para quaisquer funções $f, g : A \to B$,

$$F_X(f) = F_X(g) \Rightarrow f = g.$$

(i) Se $X = \emptyset$, o funtor F_X não é fiel, pois as funções f e g definidas por

$$\begin{array}{rcl} f : \{1\} & \to & \{2,3\} \\ 1 & \mapsto & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \{1\} & \to & \{2,3\} \\ 1 & \mapsto & 3 \end{array}$$

não são iguais e $F_X(f) = \emptyset = F_X(g)$.

(ii) Se $X \neq \emptyset$, o funtor F_X é fiel.

De facto, se $X \neq \emptyset$, então existe $x \in X$. Logo, para quaisquer funções $f, g : A \to B$ tais que $F_X(f) = F_X(g)$, tem-se $f = g$. Com efeito:

- f e g são funções com o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada,
- para qualquer $a \in A$, $f(a) = g(a)$ (se $a \in A$, tem-se $(a,x) \in A \times X$ e de $F_X(f) = F_X(g)$ segue que $(f(a),x) = (g(a),x)$; por conseguinte, $f(a) = g(a)$).

Cotação: 1.(1.5+1.5+1.5); 2.(2.0); 3.(2.25); 4.(2.25); 5.(2.5); 6.(2.5); 6.(2.0+2.0).