Álgebra Universal e Categorias

1º teste (20 de abril de 2017) — duração: 2 horas

1. Sejam $\mathcal{A} = (\{1,2,3,4,5\}; *^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\{1,2\}; *^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo $(2,0)$ cujas operações nulárias são dadas por $c^{\mathcal{A}} = 2$, $c^{\mathcal{B}} = 1$ e cujas operações binárias são definidas por

$*^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	5	2
2	2	3	3	2	2
3	2	3	2	2	2
4	5	2	2	4	2
5	2	2	2	2	2

$*^{\mathcal{B}}$	1	2
1	2	2
2	2	1

Seja $\alpha : \{1,2\} \to \{1,2,3,4,5\}$ a aplicação definida por $\alpha(1) = 2$ e $\alpha(2) = 3$.

(a) Diga, justificando, se o conjunto $Sg^{\mathcal{A}}(\{1\}) \cup Sg^{\mathcal{A}}(\{4\})$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

(b) Mostre que a aplicação α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$. Justifique que $\mathcal{B}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

2. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra unária. Mostre que se S_1 e S_2 são subuniversos de $\mathcal{A}$, então $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

3. Sejam $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f\in O})$, $\mathcal{B} = (B; (f^{\mathcal{B}})_{f\in O})$ e $\mathcal{C} = (C; (f^{\mathcal{C}})_{f\in O})$ álgebras de tipo (O, τ), $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. Seja $\alpha : A \to B \times C$ a aplicação definida por $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$, para todo $a \in A$.

(a) Mostre que α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

(b) Mostre que $\ker\alpha = \ker\alpha_1 \cap \ker\alpha_2$.

(c) Mostre que se α é um epimorfismo, então α_1 e α_2 são epimorfismos e

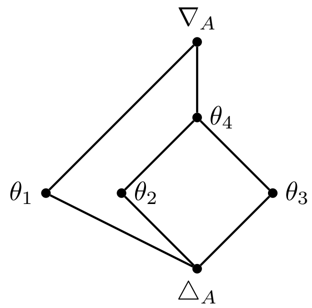
$$A/(\ker\alpha_1 \cap \ker\alpha_2) \cong A/\ker\alpha_1 \times A/\ker\alpha_2.$$

4. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1,1)$ tal que $A = \{a,b,c,d\}$ e cujas operações $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são definidas por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	b	a	b	a

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	c	d	a	b

Sabendo que o reticulado de congruências de $\mathcal{A}$ pode ser representado por



onde $\theta_1 = \theta(a,b)$, $\theta_2 = \theta(a,c)$, $\theta_3 = \theta(b,d)$ e $\theta_4 = \triangle_A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$:

(a) Determine θ_1 e justifique que (θ_1, θ_4) é um par de congruências fator.

(b) Justifique que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_4$. Defina as operações da álgebra $\mathcal{A}/\theta_4 = (A/\theta_4; f^{\mathcal{A}/\theta_4}, g^{\mathcal{A}/\theta_4})$.

(c) Diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é:
i. c-distributiva. ii. subdiretamente irredutível.

5. Considere os operadores de classes de álgebras H e S. Mostre que HSH é um operador idempotente.

Cotação: 1.(2.0+2.0); 2.(2.0); 3.(2.0+1.5+2.0); 4.(2.5+2.0+2.0); 5.(2.0).