Álgebra Universal e Categorias

Proposta de resolução do 1º teste (20 de abril de 2017) duração: 2 horas

1. **Sejam $\mathcal{A} = (\{1,2,3,4,5\}; *^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\{1,2\}; *^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo $(2,0)$ cujas operações nulárias são dadas por $c^{\mathcal{A}} = 2$, $c^{\mathcal{B}} = 1$ e cujas operações binárias são definidas por**

$*^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	5	2
2	2	3	3	2	2
3	2	3	2	2	2
4	5	2	2	4	2
5	2	2	2	2	2

$*^{\mathcal{B}}$	1	2
1	2	2
2	2	1

Seja $\alpha : \{1,2\} \to \{1,2,3,4,5\}$ a aplicação definida por $\alpha(1) = 2$ e $\alpha(2) = 3$.

(a) **Diga, justificando, se o conjunto $Sg^{\mathcal{A}}(\{1\}) \cup Sg^{\mathcal{A}}(\{4\})$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.**

Dado um conjunto $X \subseteq \{1,2,3,4,5\}$, representa-se por $Sg^{\mathcal{A}}(X)$ o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém X, isto é, $Sg^{\mathcal{A}}(X)$ é o menor subconjunto de $\{1,2,3,4,5\}$ que contém X e é fechado para as operações de $\mathcal{A}$ (o que significa que $c^{\mathcal{A}} \in Sg^{\mathcal{A}}(X)$ e, para quaisquer $x, y \in Sg^{\mathcal{A}}(X)$, $x *^{\mathcal{A}} y \in Sg^{\mathcal{A}}(X)$).

Assim, considerando $X = \{1\}$ tem-se:

- $\{1\} \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(\{1\})$;
- $c^{\mathcal{A}} = 2 \in Sg^{\mathcal{A}}(X)$ (pois $Sg^{\mathcal{A}}(\{1\})$ é fechado para a operação $c^{\mathcal{A}}$);
- $2 *^{\mathcal{A}} 2 = 3 \in Sg^{\mathcal{A}}(X)$ (pois $2 \in Sg^{\mathcal{A}}(\{1\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{1\})$ é fechado para a operação $*^{\mathcal{A}}$).

Logo $\{1,2,3\} \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(\{1\})$.

A respeito de $\{1,2,3\}$ verifica-se que este conjunto contém $\{1\}$ e é um subuniverso de $\mathcal{A}$ (pois é fechado para as operações de $\mathcal{A}$). Porém, $Sg^{\mathcal{A}}(\{1\})$ é o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém $\{1\}$. Logo $Sg^{\mathcal{A}}(\{1\}) \subseteq \{1,2,3\}$.

Portanto, $Sg^{\mathcal{A}}(\{1\}) = \{1,2,3\}$.

De modo análogo determina-se $Sg^{\mathcal{A}}(\{4\})$. De facto, como $\{4\} \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(\{4\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{4\})$ é fechado para as operações de $\mathcal{A}$, tem-se $\{2,3,4\} \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(\{4\})$. O conjunto $\{2,3,4\}$ contém $\{4\}$ e é um subuniverso de $\mathcal{A}$. Então, como $Sg^{\mathcal{A}}(\{4\})$ é o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém $\{4\}$, segue que $Sg^{\mathcal{A}}(\{4\}) \subseteq \{2,3,4\}$. Logo $Sg^{\mathcal{A}}(\{4\}) = \{2,3,4\}$.

Assim, $Sg^{\mathcal{A}}(\{1\}) \cup Sg^{\mathcal{A}}(\{4\}) = \{1,2,3,4\}$. O conjunto $\{1,2,3,4\}$ não é um subuniverso de $\mathcal{A}$, pois não é fechado para a operação $*^{\mathcal{A}}$ ($1, 4 \in \{1,2,3,4\}$, mas $1 *^{\mathcal{A}} 4 = 5 \notin \{1,2,3,4\}$).

(b) **Mostre que a aplicação α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$. Justifique que $\mathcal{B}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathcal{A}$.**

A aplicação α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$ se α é uma aplicação injetiva e é um homomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, ou seja, se α é uma aplicação injetiva tal que:

- $\alpha(c^{\mathcal{B}}) = c^{\mathcal{A}}$;
- para quaisquer $x, y \in \{1,2\}$, $\alpha(x *^{\mathcal{B}} y) = \alpha(x) *^{\mathcal{A}} \alpha(y)$.

Ora, atendendo a que

- $\alpha(c^{\mathcal{B}}) = \alpha(1) = 2 = c^{\mathcal{A}}$,
- $\alpha(1 *^{\mathcal{B}} 1) = \alpha(2) = 3 = 2 *^{\mathcal{A}} 2 = \alpha(1) *^{\mathcal{A}} \alpha(1)$,
- $\alpha(1 *^{\mathcal{B}} 2) = \alpha(2) = 3 = 2 *^{\mathcal{A}} 3 = \alpha(1) *^{\mathcal{A}} \alpha(2)$,
- $\alpha(2 *^{\mathcal{B}} 1) = \alpha(2) = 3 = 3 *^{\mathcal{A}} 2 = \alpha(2) *^{\mathcal{A}} \alpha(1)$,
- $\alpha(2 *^{\mathcal{B}} 2) = \alpha(1) = 2 = 3 *^{\mathcal{A}} 3 = \alpha(2) *^{\mathcal{A}} \alpha(2)$,

conclui-se que α é um homomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$. Claramente, a aplicação α é injetiva, pois

$$\forall x, y \in \{1, 2\}, x \neq y \Rightarrow \alpha(x) \neq \alpha(y).$$

De facto, $1 \neq 2$ e $\alpha(1) = 2 \neq 3 = \alpha(2)$. Logo α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$.

Um vez que α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, tem-se $\mathcal{B} \cong \alpha(\mathcal{B})$. Além disso, como $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{B}$ e α é um homomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, $\alpha(\mathcal{B})$ é um subálgebra de $\mathcal{A}$. Portanto, $\mathcal{B}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

2. **Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra unária. Mostre que se S_1 e S_2 são subuniversos de $\mathcal{A}$, então $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.**

Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra unária e S_1, S_2 subuniversos de $\mathcal{A}$. Pretende-se mostrar que $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

Uma vez que $\mathcal{A}$ é uma álgebra unária, toda a operação de $\mathcal{A}$ é unária. Assim, um subconjunto X de A diz-se um subunivero de $\mathcal{A}$ se, para qualquer símbolo de operação unário f e para qualquer $x \in X$, $f^{\mathcal{A}}(x) \in X$.

Então, facilmente se verifica que $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$. Com efeito, como S_1 e S_2 são subuniversos de $\mathcal{A}$, tem-se $S_1, S_2 \subseteq A$, pelo que $S_1 \cup S_2 \subseteq A$. Além disso, para qualquer símbolo de operação f e para qualquer $x \in S_1 \cup S_2$, tem-se $f^{\mathcal{A}}(x) \in S_1 \cup S_2$. De facto, como $x \in S_1 \cup S_2$, então $x \in S_1$ ou $x \in S_2$. Caso $x \in S_1$, segue que $f^{\mathcal{A}}(x) \in S_1$, pois $x \in S_1$ e S_1 é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}}$. Caso $x \in S_2$, segue que $f^{\mathcal{A}}(x) \in S_2$, pois S_2 também é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}}$. Logo $f^{\mathcal{A}}(x) \in S_1 \cup S_2$. Desta forma, provámos que $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

3. **Sejam $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f \in O})$, $\mathcal{B} = (B; (f^{\mathcal{B}})_{f \in O})$ e $\mathcal{C} = (C; (f^{\mathcal{C}})_{f \in O})$ álgebras de tipo (O, τ), $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. Seja $\alpha : A \to B \times C$ a aplicação definida por $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$, para todo $a \in A$.**

   (a) **Mostre que α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$.**

   A aplicação α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ se, para qualquer símbolo de operação n-ário $f \in O$ e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B} \times \mathcal{C}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)).$$

   Atendendo a que $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, é imediato que α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$. De facto, para qualquer símbolo de operação n-ário $f \in O$ e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\begin{aligned}
\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= (\alpha_1(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)), \alpha_2(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) && (1)\\
&= (f^{\mathcal{B}}(\alpha_1(a_1), \ldots, \alpha_1(a_n)), f^{\mathcal{C}}(\alpha_2(a_1), \ldots, \alpha_2(a_n))) && (2)\\
&= f^{\mathcal{B} \times \mathcal{C}}((\alpha_1(a_1), \alpha_2(a_1)), \ldots, (\alpha_1(a_n), \alpha_2(a_n))) && (3)\\
&= f^{\mathcal{B} \times \mathcal{C}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) && (4)
\end{aligned}$$

   (1) Por definição de α.
   (2) $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.
   (3) Por definição de $f^{\mathcal{B} \times \mathcal{C}}$.
   (4) Por definição de α.

   (b) **Mostre que $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$.**

   Dadas álgebras $\mathcal{C} = (C; F)$ e $\mathcal{D} = (D; G)$ do mesmo tipo e um homomorfismo $\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, tem-se

$$\ker \beta = \{(x, y) \in C \times C \mid \beta(x) = \beta(y)\}.$$

   Assim, para qualquer $(x, y) \in A \times A$,

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \ker \alpha &\Leftrightarrow \alpha(x) = \alpha(y)\\
&\Leftrightarrow (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = (\alpha_1(y), \alpha_2(y))\\
&\Leftrightarrow \alpha_1(x) = \alpha_1(y) \text{ e } \alpha_2(x) = \alpha_2(y)\\
&\Leftrightarrow (x, y) \in \ker \alpha_1 \text{ e } (x, y) \in \ker \alpha_2\\
&\Leftrightarrow (x, y) \in \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2.
\end{aligned}$$

   Logo $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$.

(c) **Mostre que se α é um epimorfismo, então α_1 e α_2 são epimorfismos e**

$$A/(\ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2) \cong A/\ker \alpha_1 \times A/\ker \alpha_2.$$

Dadas álgebras $\mathcal{C} = (C; F)$ e $\mathcal{D} = (D; G)$ do mesmo tipo e uma aplicação $\beta : C \to \mathcal{D}$, diz-se que β é um epimorfismo se β é um homomorfismo sobrejetivo.

Admitamos que α é um epimorfismo. Pretende-se mostrar que α_1 e α_2 são epimorfismos. Uma vez que α_1 e α_2 são homomorfismos, resta mostrar que α_1 e α_2 são aplicações sobrejetivas.

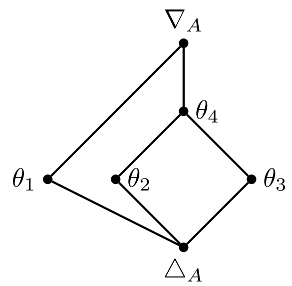
Mostremos que a aplicação α_1 é sobrejetiva, ou seja, mostremos que, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $\alpha_1(a) = b$. Seja $b \in B$. Como $C \neq \emptyset$, existe $c \in C$. Logo $(b, c) \in B \times C$. Uma vez que α é uma aplicação sobrejetiva de A em $B \times C$ (pois α é um epimorfismo) e $(b, c) \in B \times C$, existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = (b, c)$, isto é, existe $a \in A$ tal que $(\alpha_1(a), \alpha_2(a)) = (b, c)$. Logo, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $\alpha_1(a) = b$. Logo α_1 é sobrejetiva.
A prova de que α_2 é sobrejetiva é análoga.

4. **Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1, 1)$ tal que $A = \{a, b, c, d\}$ e cujas operações $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são definidas por**

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	b	a	b	a

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	c	d	a	b

Sabendo que o reticulado de congruências de $\mathcal{A}$ pode ser representado por



onde $\theta_1 = \theta(a, b)$, $\theta_2 = \theta(a, c)$, $\theta_3 = \theta(b, d)$ e $\theta_4 = \triangle_A \cup \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$:

(a) **Determine θ_1 e justifique que (θ_1, θ_4) é um par de congruências fator.**

Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ). Uma relação binária em A diz-se uma congruência em $\mathcal{A}$ se θ é uma relação de equivalência em A que satisfaz a propriedade de substituição, i.e., se θ é uma relação de equivalência tal que, para qualquer símbolo de operação n-ário $f \in O$ e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n,\ b_1, \ldots b_n \in A$,

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \theta \Rightarrow (f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta.$$

Dado $X \subseteq A^2$, representa-se por $\theta(X)$ a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém X.

Uma vez que $\theta_1 = \theta(a, b)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a, b)\}$ segue que

- $(a, b) \in \theta_1$;
- $(b, a) \in \theta_1$ (pois θ_1 é simétrica);
- $\triangle_A \subseteq \theta_1$ (pois θ_1 é reflexiva);
- $(f^{\mathcal{A}}(a), f^{\mathcal{A}}(b)) = (b, a), (f^{\mathcal{A}}(b), f^{\mathcal{A}}(a)) = (a, b) \in \theta_1$ (pela propriedade de substituição);
- $(g^{\mathcal{A}}(a), g^{\mathcal{A}}(b)) = (c, d), (g^{\mathcal{A}}(b), g^{\mathcal{A}}(a)) = (d, c) \in \theta_1$ (pela propriedade de substituição);
- $(f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}}(d)) = (b, a), (f^{\mathcal{A}}(d), f^{\mathcal{A}}(c)) = (a, b) \in \theta_1$ (pela propriedade de substituição);
- $(g^{\mathcal{A}}(c), g^{\mathcal{A}}(d)) = (a, b), (g^{\mathcal{A}}(d), g^{\mathcal{A}}(c)) = (b, a) \in \theta_1$ (pela propriedade de substituição).

Logo $\triangle_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\} \subseteq \theta_1$.

A relação $\theta = \triangle_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$ é uma congruência em $\mathcal{A}$ (pois é uma relação de equivalência que satisfaz a propriedade de substituição) e contém $\{(a, b)\}$. Mas $\theta_1 = \theta(a, b)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a, b)\}$. Logo $\theta_1 = \theta(a, b) \subseteq \theta$.

Assim, $\theta_1 = \theta = \triangle_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$.

O par (θ_1, θ_4) é um par de congruências fator, pois

- $\theta_1 \cap \theta_4 = \triangle_A$;
- $\theta_1 \vee \theta_4 = \theta_1 \cup \theta_4 \cup \{(a,d),(d,a),(b,c),(c,b)\} = \nabla_A$;
- $\theta_1 \circ \theta_4 = \theta_1 \cup \theta_4 \cup \{(a,d),(d,a),(b,c),(c,b)\} = \theta_4 \circ \theta_1$.

(b) **Justifique que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_4$. Defina as operações da álgebra $\mathcal{A}/\theta_4 = (A/\theta_4; f^{\mathcal{A}/\theta_4}, g^{\mathcal{A}/\theta_4})$.**

Da alínea anterior sabe-se que (θ_1, θ_4) é um par de congruências fator. Logo $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_4$.

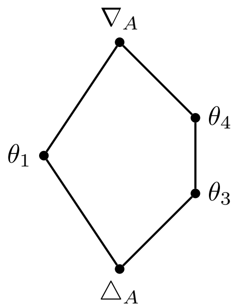
Atendendo a que $\theta_4 = \triangle_A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$, tem-se $A/\theta_4 = \{[a]_{\theta_4}, [b]_{\theta_4}\}$, onde $[a]_{\theta_4} = [c]_{\theta_4}$ e $[b]_{\theta_4} = [d]_{\theta_4}$. As operações $f^{\mathcal{A}/\theta_4}$ e $g^{\mathcal{A}/\theta_4}$ são definidas por

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{A}/\theta_4} : A/\theta_4 & \rightarrow & A/\theta_4 \\ [a]_{\theta_4} & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(a)]_{\theta_4} = [b]_{\theta_4} \\ [b]_{\theta_4} & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(b)]_{\theta_4} = [a]_{\theta_4} \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} g^{\mathcal{A}/\theta_4} : A/\theta_4 & \rightarrow & A/\theta_4 \\ [a]_{\theta_4} & \mapsto & [g^(a)]_{\theta_4} = [c]_{\theta_4} = [a]_{\theta_4} \\ [b]_{\theta_4} & \mapsto & [g^(b)]_{\theta_4} = [d]_{\theta_4} = [b]_{\theta_4} \end{array}.$$

(c) **Diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é:**
i. c-distributiva. ii. subdiretamente irredutível.

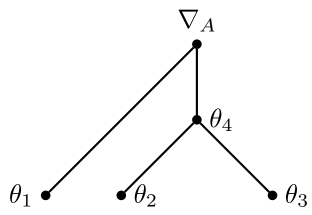
A álgebra $\mathcal{A}$ é c-distributiva se o reticulado $\text{Con}\mathcal{A}$ das congruências de $\mathcal{A}$ é distributivo. O reticulado $\text{Con}\mathcal{A}$ é distributivo se e só se não tem qualquer subrreticulado isomorfo a N_5 nem a M_5.

Ora, o reticulado



é um subrreticulado de $\text{Con}\mathcal{A}$ ($\{\triangle_A, \theta_1, \theta_3, \theta_4, \nabla_A\} \subseteq \text{Con}\mathcal{A}$ e $\{\triangle_A, \theta_1, \theta_3, \theta_4, \nabla_A\}$ é fechado para as operações ínfimo e supremo definidas em $\text{Con}\mathcal{A}$) e é isomorfo a N_5. Logo $\text{Con}\mathcal{A}$ não é distributivo e, por conseguinte, $\mathcal{A}$ não é c-distributiva.

A álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível se e só se a álgebra $\mathcal{A}$ é trivial ou $\text{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo. Uma vez que a álgebra $\mathcal{A}$ não é trivial e o conjunto parcialmente ordenado $\text{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$



não tem elemento mínimo (note-se que não existe $\theta \in \text{Con}\mathcal{A}$ tal que $\theta \subseteq \alpha$, para todo $\alpha \in \text{Con}\mathcal{A}$), concluímos que a álgebra $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

5. **Considere os operadores de classes de álgebras H e S. Mostre que HSH é um operador idempotente.**

Pretendemos mostrar que HSH é idempotente, ou seja, que $(HSH)^2 = HSH$.

Ora, atendendo a que $H^2 = H$, $S^2 = S$ e $SH \subseteq HS$ tem-se:

$$\begin{array}{rcll} HSH & = & HSSH & (\text{ pois } S^2 = S) \\ & = & HSSHH & (\text{ pois } H^2 = H) \\ & \subseteq & HSHSH & (\text{ pois } SH \subseteq HS) \\ & = & HSHHSH & (\text{ pois } H^2 = H) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcll} HSHHSH & = & HSHSH & (\text{ pois } H^2 = H) \\ & \subseteq & HHSSH & (\text{ pois } SH \subseteq HS) \\ & = & HSH & (\text{ pois } H^2 = H \text{ e } S^2 = S). \end{array}$$

Logo $(HSH)^2 = HSH$.

Cotação: 1.(2.0+2.0); 2.(2.0); 3.(2.0+1.5+2.0); 4.(2.5+2.0+2.0); 5.(2.0).