

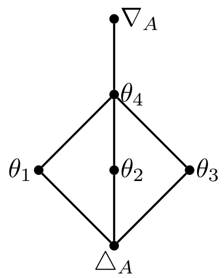
Álgebra Universal e Categorias

Exame de recurso (27 de junho de 2016) — duração: 2h30

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{A}_n = (A_n; (f^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}))$ a álgebra de tipo $(1,0)$, onde $A_n = \{0,1,2,\ldots,2n\}$, $0^{\mathcal{A}} = 0$ e $f^{\mathcal{A}} : A_n \to A_n$ é a operação definida por
$$f^{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \in \{0,1,2,\ldots,2n-2\} \\ 1 & \text{se } x = 2n-1 \\ 0 & \text{se } x = 2n \end{cases}$$
Para cada $n \in \mathbb{N}$: i. Determine $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\})$ e $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\})$. ii. Indique todos os subuniversos de $\mathcal{A}_n$.

2. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $\leq$ a relação de ordem parcial definida por
$$x \leq y \text{ se e só se } x = x \wedge y,\ \forall x, y \in R.$$
Para cada $a \in R$:
   (a) Mostre que a álgebra $\mathcal{I}_a = (I_a; \wedge^{\mathcal{I}_a}, \vee^{\mathcal{I}_a})$, onde $I_a = \{x \in R : x \leq a\}$ e $\wedge^{\mathcal{I}_a}$ e $\vee^{\mathcal{I}_a}$ são as operações definidas por
   $$x \wedge^{\mathcal{I}_a} y = x \wedge y, \quad x \vee^{\mathcal{I}_a} y = x \vee y,\ \forall x, y \in I_a,$$
   é uma subálgebra de $\mathcal{R}$.
   (b) Mostre que se $\mathcal{R}$ é um reticulado distributivo, então a aplicação $\phi_a : R \to I_a$ definida por $\phi_a(x) = x \wedge a$, para todo $x \in R$, é um homomorfismo de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{I}_a$.

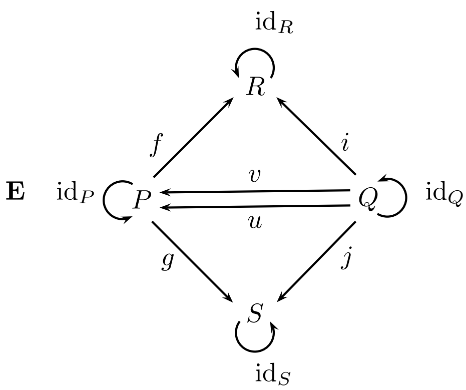
3. Seja $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f \in O})$ uma álgebra.
   (a) Mostre que se $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$, então $\theta_1 \cap \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$.
   (b) Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra cujo reticulado de congruências pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



   diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é:
   i. diretamente indecomponível. ii. subdiretamente irredutível. iii. c-distributiva.

4. Considere os operadores S, I e P. Mostre que SIP é um operador de fecho.

5. Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ as categorias definidas pelos diagramas seguintes



onde $i = f \circ u = f \circ v$
e $j = g \circ u = g \circ v$.

$(v.s.f.f.)$

(a) Construa a categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

(b) Diga, justificando, se $(P, (f, g))$ é um produto de R e S na categoria $\mathbf{E}$.

6. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita, então f é um bimorfismo.

7. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $f, g : A \to B$ morfismos em $\mathbf{C}$ e (I, i) um igualizador de f e g. Mostre que se $\alpha : B \to C$ é um monomorfismo, então (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$.

8. Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ categorias, $f : A \to B$ um $\mathbf{C}$-morfismo e $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ funtores.

   (a) Mostre que GF é um funtor da categoria $\mathbf{C}$ na categoria $\mathbf{E}$.

   (b) Mostre que se F é fiel e pleno e $F(f)$ é invertível à esquerda, então f é invertível à esquerda.

Cotação: 1.(1.5) 2.(1.75+1.75); 3.(1.75+2.0); 4.(1.75); 5.(1.25+1.25) 6.(1.75) 7.(2.0) 8.(1.5+1.75).