Álgebra Universal e Categorias

Exame de recurso (27 de junho de 2016) — duração: 2h30

1. **Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{A}_n = (A_n; (f^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}))$ a álgebra de tipo $(1,0)$, onde $A_n = \{0,1,2,\ldots,2n\}$, $0^{\mathcal{A}} = 0$ e $f^{\mathcal{A}} : A_n \to A_n$ é a operação definida por**

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \textbf{se} \quad x \in \{0,1,2,\ldots,2n-2\} \\ 1 & \textbf{se} \quad x = 2n-1 \\ 0 & \textbf{se} \quad x = 2n \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$: i. Determine $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\})$ e $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\})$. ii. Indique todos os subuniversos de $\mathcal{A}_n$.

i. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\})$ é o menor subuniverso de $\mathcal{A}_n$ que contém $\{1\}$. Por conseguinte, $1 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\})$. Uma vez que $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\})$ é um subuniverso de $\mathcal{A}_n$, tem de ser fechado para todas as operações de $\mathcal{A}_n$, em particular tem de ser fechado para a operação nulária $0^{\mathcal{A}}$, donde segue que $0 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\})$. Atendendo a que $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\})$ também é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}}$, então

$$\begin{array}{rll} 0 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\}) & \Rightarrow & f(0) = 2 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\}) \\ & \Rightarrow & f(2) = 4 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\}) \\ & \vdots & \\ & \Rightarrow & f(2n-2) = 2n \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\}) \\ & \Rightarrow & f(2n) = 0 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\}) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rll} 1 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\}) & \Rightarrow & f(1) = 3 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\}) \\ & \Rightarrow & f(3) = 5 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\}) \\ & \vdots & \\ & \Rightarrow & f(2n-1) = 1 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\}). \end{array}$$

Assim, $\{0,1,2,\ldots,2n\} \subseteq Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\})$ e, uma vez que $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\}) \subseteq \{0,1,2,\ldots,2n\}$, conclui-se que $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{1\}) = \{0,1,2,\ldots,2n\}$.

De forma análoga, determina-se $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\})$. Como $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\})$ é o menor subunivero de $\mathcal{A}_n$ que contém $\{2\}$, então $2 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\})$. Atendendo a que $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\})$ é fechado para as operações de $\mathcal{A}_n$, então

$$0 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\})$$

e

$$\begin{array}{rll} 2 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\}) & \Rightarrow & f(2) = 4 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\}) \\ & \Rightarrow & f(4) = 8 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\}) \\ & \vdots & \\ & \Rightarrow & f(2n-2) = 2n \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\}) \\ & \Rightarrow & f(2n) = 0 \in Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\}). \end{array}$$

Logo $\{0,2,4,\ldots,2n\} \subseteq Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\})$. Uma vez que $2 \in \{0,2,4,\ldots,2n\}$, $\{0,2,4,\ldots,2n\}$ é um subuniverso de $\mathcal{A}_n$ e é o menor subuniverso de $\mathcal{A}_n$ que contém $\{2\}$, concluímos que $Sg^{\mathcal{A}_n}(\{2\}) = \{0,2,4,\ldots,2n\}$.

ii. Os únicos subuniversos de A_n são A_n e $\{0,2,4,\ldots,2n\}$, pois:

- todo o subuniverso de $\mathcal{A}_n$ tem de estar contido em A_n;
- $\emptyset$ não é subuniverso de $\mathcal{A}_n$, uma vez que $\mathcal{A}_n$ tem operações nulárias;
- todo o subuniverso de $\mathcal{A}_n$ que contenha um número ímpar de A_n tem de conter todos os elementos de A_n;
- um subuniverso de $\mathcal{A}_n$ que contenha um número par de A_n tem de conter todos os números pares de A_n.

2. **Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $\leq$ a relação de ordem parcial definida por**

$$x \leq y \text{ se e só se } x = x \wedge y, \ \forall x, y \in R.$$

Para cada $a \in R$:

(a) **Mostre que a álgebra $\mathcal{I}_a = (I_a; \wedge^{\mathcal{I}_a}, \vee^{\mathcal{I}_a})$, onde $I_a = \{x \in R : x \leq a\}$ e $\wedge^{\mathcal{I}_a}$ e $\vee^{\mathcal{I}_a}$ são as operações definidas por**

$$x \wedge^{\mathcal{I}_a} y = x \wedge y, \quad x \vee^{\mathcal{I}_a} y = x \vee y, \ \forall x, y \in I_a,$$

é uma subálgebra de $\mathcal{R}$.

A álgebra $\mathcal{I}_a = (I_a; \wedge^{\mathcal{I}_a}, \vee^{\mathcal{I}_a})$ é uma subálgebra de $\mathcal{R}$ se:

(1) $I_a \neq \emptyset$;

(2) I_a é um subuniverso de $\mathcal{R}$;

(3) para quaisquer $x, y \in I_a$, $x \wedge^{\mathcal{I}_a} y = x \wedge y$ e $x \vee^{\mathcal{I}_a} y = x \vee y$.

Verifiquemos que as três condições anteriores são satisfeitas.

(1) Uma vez que $a \wedge a = a$, tem-se $a \leq a$ e, portanto, $a \in I_a$. Logo $I_a \neq \emptyset$.

(2) Dado $a \in R$, o conjunto I_a é um subuniverso de $\mathcal{R}$ se $I_a \subseteq R$ e, para quaisquer $x, y \in I_a$, $x \wedge y \in I_a$ e $x \vee y \in I_a$.

Obviamente $I_a \subseteq R$. Além disso, para quaisquer $x, y \in R$,

$$\begin{array}{rcl} x, y \in I_a & \Rightarrow & x, y \in R \text{ e } x \leq a \text{ e } y \leq a \\ & \Rightarrow & x \wedge y, x \vee y \in R \text{ e } \inf\{x, y\} \leq a \text{ e } \sup\{x, y\} \leq a \quad (*) \\ & \Rightarrow & x \wedge y, x \vee y \in R \text{ e } x \wedge y \leq a \text{ e } x \vee y \leq a \\ & \Rightarrow & x \wedge y \in I_a \text{ e } x \vee y \in I_a. \end{array}$$

Logo I_a é um subuniverso de $\mathcal{R}$.

$(*)$ Como $x, y \in R$ e $\mathcal{R}$ é reticulado, é imediato que $x \wedge y \in R$ e $x \vee y \in R$. Uma vez que $\inf\{x, y\} \leq x, y$ e $x \leq a$ e $y \leq a$, vem que $\inf\{x, y\} \leq a$. Além disso, como $x \leq a$ e $y \leq a$, o elemento a é um majorante de $\{x, y\}$, pelo que $\sup\{x, y\} \leq a$ (pois $\sup\{x, y\}$ é o menor dos majorantes de $\{x, y\}$).

(3) Imediato, pela definição de $\wedge^{\mathcal{I}_a}$ e $\vee^{\mathcal{I}_a}$.

De (1), (2) e (3) conclui-se que $\mathcal{I}_a$ é uma subálgebra de $\mathcal{R}$.

(b) **Mostre que se $\mathcal{R}$ é um reticulado distributivo, então a aplicação $\phi_a : R \to I_a$ definida por $\phi_a(x) = x \wedge a$, para todo $x \in R$, é um homomorfismo de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{I}_a$.**

A aplicação ϕ_a é um homomorfismo de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{I}_a$ se, para quaisquer $x, y \in R$,

$$\phi_a(x \wedge y) = \phi_a(x) \wedge^{\mathcal{I}_a} \phi_a(y) \text{ e } \phi_a(x \vee y) = \phi_a(x) \vee^{\mathcal{I}_a} \phi_a(y).$$

Para quaisquer $x, y \in R$,

$$\begin{array}{rcll} \phi_a(x \wedge y) & = & (x \wedge y) \wedge a & \text{(definição de } \phi_a) \\ & = & (x \wedge y) \wedge (a \wedge a) & \text{(idempotência de } \wedge) \\ & = & (x \wedge a) \wedge (y \wedge a) & \text{(comutatividade e associatividade de } \wedge) \\ & = & \phi_a(x) \wedge \phi_a(y) & \text{(definição de } \phi_a) \\ & = & \phi_a(x) \wedge^{\mathcal{I}_a} \phi_a(y) & (\phi_a(x), \phi_a(y) \in I_a \text{ e definição de } \wedge^{\mathcal{I}_a}), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \phi_a(x \vee y) & = & (x \vee y) \wedge a & \text{(definição de } \phi_a) \\ & = & (x \wedge a) \vee (y \wedge a) & (R \text{ é distributivo}) \\ & = & \phi_a(x) \vee \phi_a(y) & \text{(definição de } \phi_a) \\ & = & \phi_a(x) \vee^{\mathcal{I}_a} \phi_a(y) & (\phi_a(x), \phi_a(y) \in I_a \text{ e definição de } \vee^{\mathcal{I}_a}). \end{array}$$

Logo ϕ_a é um homomorfismo de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{I}_a$.

3. **Seja $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f \in O})$ uma álgebra.**

(a) **Mostre que se $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$, então $\theta_1 \cap \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$.**

Sejam θ_1 e θ_2 congruências em $\mathcal{A}$. Então θ_1 e θ_2 são relações de equivalência em A e satisfazem a propriedade de substituição. Uma vez que θ_1 e θ_2 satisfazem a propriedade de substituição, então, para qualquer símbolo de operação n-ário f de O e para quaisquer $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in A$, são satisfeitas as condições seguintes:

(1) $(\forall i \in \{1, \ldots n\}, (x_i, y_i) \in \theta_1 \Rightarrow (f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n), f^{\mathcal{A}}(y_1, \ldots, y_n)) \in \theta_1,$
(2) $(\forall i \in \{1, \ldots n\}, (x_i, y_i) \in \theta_2 \Rightarrow (f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n), f^{\mathcal{A}}(y_1, \ldots, y_n)) \in \theta_2.$

Uma vez que θ_1 e θ_2 são relações de equivalência em A, então

(3) $\theta_1 \cap \theta_2$ é uma relação de equivalência em A.

De facto, $\theta_1 \cap \theta_2$ é uma relação binária em A e, além disso, $\theta_1 \cap \theta_2$ é reflexiva, simétrica e transitiva:

- para qualquer $x \in A$, $(x, x) \in \theta_1$ e $(x, x) \in \theta_2$, pois θ_1 e θ_2 são reflexivas. Logo, para qualquer $x \in A$, $(x, x) \in \theta_1 \cap \theta_2$ e, portanto, $\theta_1 \cap \theta_2$ é reflexiva.

- para quaisquer $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \theta_1 \cap \theta_2 \quad &\Rightarrow \quad (x, y) \in \theta_1 \text{ e } (x, y) \in \theta_2 \\
&\Rightarrow \quad (y, x) \in \theta_1 \text{ e } (y, x) \in \theta_2 \quad \text{(pois } \theta_1 \ \ e \ \ \theta_2 \text{ são simétricas)} \\
&\Rightarrow \quad (y, x) \in \theta_1 \cap \theta_2.
\end{aligned}$$

Logo $\theta_1 \cap \theta_2$ é simétrica.

- para quaisquer $x, y, z \in A$,

$$\begin{aligned}
(x, y), (y, z) \in \theta_1 \cap \theta_2 \quad &\Rightarrow \quad (x, y), (y, z) \in \theta_1 \text{ e } (x, y), (y, z) \in \theta_2 \\
&\Rightarrow \quad (x, z) \in \theta_1 \text{ e } (x, z) \in \theta_2 \qquad \text{(pois } \theta_1 \ \ e \ \ \theta_2 \text{ são transitivas)} \\
&\Rightarrow \quad (x, z) \in \theta_1 \cap \theta_2.
\end{aligned}$$

Logo (x, z) é transitiva.

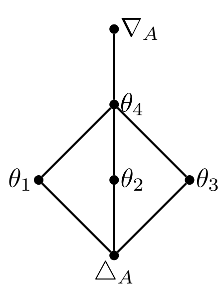
Atendendo a que θ_1 e θ_2 satisfazem a propriedade de substituição, então

(4) $\theta_1 \cap \theta_2$ satisfaz a propriedade de substituição, pois

$$\begin{aligned}
(\forall i \in \{1, \ldots n\}, (x_i, y_i) \in \theta_1 \cap \theta_2) \quad &\Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots n\}, (x_i, y_i) \in \theta_1 \text{ e } (x_i, y_i) \in \theta_2 \\
&\Rightarrow \quad (f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n), f^{\mathcal{A}}(y_1, \ldots, y_n)) \in \theta_1 \text{ e} \\
&\qquad\ (f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n), f^{\mathcal{A}}(y_1, \ldots, y_n)) \in \theta_2 \qquad \text{(por (1) e (2))} \\
&\Rightarrow \quad (f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n), f^{\mathcal{A}}(y_1, \ldots, y_n)) \in \theta_1 \cap \theta_2.
\end{aligned}$$

De (3) e (4) conclui-se que $\theta_1 \cap \theta_2$ é uma congruência em $\mathcal{A}$.

(b) **Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra cujo reticulado de congruências pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte**



diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é:

i. **diretamente indecomponível.**

A álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível se e só se as únicas congruências fator de $\mathcal{A}$ são $\triangle_A$ e ∇_A.

Uma congruência θ em $\mathcal{A}$ diz-se uma congruência fator se existe uma congruência θ^* em $\mathcal{A}$ tal que $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$, $\theta \vee \theta^* = \nabla_A$ e $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$.

Do diagrama de Hasse que representa o reticulado $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ conclui-se que $\triangle_A$ e ∇_A são as únicas congruências fator de $\mathcal{A}$, uma vez que:

- $\triangle_A$ e ∇_A são congruências fator de $\mathcal{A}$;
- $\theta_i \vee \theta_j \neq \nabla_A$, para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- $\theta_i \wedge \nabla_A = \theta_i \neq \triangle_A$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- $\theta_i \vee \triangle_A = \theta_i \neq \nabla_A$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Logo $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível.

ii. **subdiretamente irredutível.**

A álgebra $\mathcal{A}$ subdiretamente irredutível se e só se $\mathcal{A}$ é a álgebra trivial ou $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo.

Uma vez que $\mathcal{A}$ não é uma álgebra trivial (pois $\mathrm{Con}\mathcal{A} \neq \{\triangle_{\mathrm{A}}\}$) e $\mathrm{Con}\mathcal{A}\setminus\{\triangle_A\}$ não tem elemento mínimo, então $\mathcal{A}$ não é sudiretamente irredutivel.

iii. **c-distributiva.**

A álgebra $\mathcal{A}$ é c-distributiva se $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ é um reticulado distributivo. Um reticulado $\mathcal{R}$ é distributivo se e só se $\mathcal{R}$ não tem qualquer subreticulado isomorfo a M_5 ou a N_5.

Uma vez que $\{\triangle_A, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ é um subreticulado de $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ (pois é um subconjunto de $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ fechado para as operações $\wedge$ e $\vee$) e é isomorfo a M_5, concluímos que $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ não é um reticulado distributivo. Logo a álgebra $\mathcal{A}$ não é c-distributiva.

4. **Considere os operadores S, I e P. Mostre que SIP é um operador de fecho.**

O operador SIP é um operador de fecho se:

(1) para qualquer classe $\mathbf{K}$ de álgebras do mesmo tipo, $\mathbf{K} \subseteq SIP(\mathbf{K})$;

(2) para qualquer classe $\mathbf{K}$ de álgebras do mesmo tipo, $SIP(\mathbf{K}) = (SIP)^2(\mathbf{K})$;

(3) para quaisquer classes $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$ de álgebras do mesmo tipo,

$$\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \Rightarrow SIP(\mathbf{K}_2) \subseteq SIP(\mathbf{K}_2).$$

Facilmente se verificam as condições anteriores. De facto,

(1) Para qualquer operador $O \in \{H, I, S, P, Ps\}$ e para qualquer classe $\mathbf{K}'$ de álgebras do mesmo tipo, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$. Logo, para qualquer classe $\mathbf{K}$ de álgebras do mesmo tipo, tem-se $\mathbf{K} \subseteq P(\mathbf{K})$, $P(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$ e $IP(\mathbf{K}) \subseteq SIP(\mathbf{K})$, donde segue que $\mathbf{K} \subseteq SIP(\mathbf{K})$.

(2) De (1) segue que, para qualquer classe $\mathbf{K}$ de álgebras do mesmo tipo, $P(\mathbf{K}) \subseteq PSIP(\mathbf{K})$, donde $IP(\mathbf{K}) \subseteq IPSIP(\mathbf{K})$ e, por conseguinte $SIP(\mathbf{K}) \subseteq (SIP)^2(\mathbf{K})$. Além disso,

$$\begin{array}{rcll} (SIP)^2(\mathbf{K}) & = & SIPSIP(\mathbf{K}) & \\ & \subseteq & SISPIP(\mathbf{K}) & \text{(pois } PS \leq SP) \\ & = & S^2IPIP(\mathbf{K}_1) & \text{(pois } SI = IS) \\ & = & SIP(\mathbf{K}_1) & \text{(pois } S^2 = S \text{ e } (IP)^2 = IP). \end{array}$$

Logo $(SIP)^2 = SIP$.

(3) Se $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$ são classes de álgebras do mesmo tipo tais que $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2$, então $P(\mathbf{K}_1) \subseteq P(\mathbf{K}_2)$, donde $IP(\mathbf{K}_1) \subseteq IP(\mathbf{K}_2)$ e, por conseguinte, $SIP(\mathbf{K}_1) \subseteq SIP(\mathbf{K}_2)$.

De (1), (2) e (3) conclui-se que SIP é um operador de fecho.

5. **Sejam C, D e E as categorias definidas pelos diagramas seguintes**

$$\mathbf{C} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \end{tikzcd} \qquad \mathbf{D} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "\mathrm{id}_X"] \arrow[r, "h"] & Y \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Y"] \end{tikzcd}$$

$$\mathbf{E} \quad \begin{tikzcd} & R \arrow[loop above, "\mathrm{id}_R"] & \\ P \arrow[loop left, "\mathrm{id}_P"] \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Q \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Q"] \arrow[ul, "i"'] \arrow[dl, "j"] \arrow[ll, shift right, "v"'] \arrow[ll, shift left, "u"] \\ & S \arrow[loop below, "\mathrm{id}_S"] & \end{tikzcd}$$

onde $i = f \circ u = f \circ v$
e $j = g \circ u = g \circ v$.

(a) **Construa a categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.**

A categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ é a categoria definida do seguinte modo:

- os objetos de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ são todos os pares (A, B), onde A é um objeto de $\mathbf{C}$ e B é um objecto de $\mathbf{D}$;
- os morfismos de $\hom((A, B), (A', B'))$ são todos os elementos da forma $(f, g) : (A, B) \to (A', B')$, onde $f : A \to A'$ é um morfismo de $\mathbf{C}$ e $g : B \to B'$ é um morfismo de $\mathbf{D}$;
- para cada objeto (A, B) de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, o morfismo identidade $\mathrm{id}_{(A,B)}$ é o par $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B)$;
- a composição $(f', g') \circ (f, g)$ dos morfismos (f, g) e (f', g') de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ é definida componente a componente, isto é, $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$.

Assim, a categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ é a categoria representada pelo diagrama seguinte

$$
\begin{tikzcd}
(A,X) \arrow[loop left, "\mathrm{id}_{(A,X)}"] \arrow[r, shift left, "{(f,\mathrm{id}_X)}"] \arrow[r, shift right, "{(g,\mathrm{id}_X)}"'] \arrow[d, "{(\mathrm{id}_A,h)}"'] \arrow[dr, shift right, "{(f,h)}"'] \arrow[dr, shift left, "{(g,h)}"] & (B,X) \arrow[loop right, "\mathrm{id}_{(B,X)}"] \arrow[d, "{(\mathrm{id}_B,h)}"] \\
(A,Y) \arrow[loop left, "\mathrm{id}_{(A,Y)}"] \arrow[r, shift left, "{(f,\mathrm{id}_Y)}"] \arrow[r, shift right, "{(g,\mathrm{id}_Y)}"'] & (B,Y) \arrow[loop right, "\mathrm{id}_{(B,Y)}"]
\end{tikzcd}
$$

(b) **Diga, justificando, se $(P, (f, g))$ é um produto de R e S na categoria $\mathbf{E}$.**

Por definição de produto de dois objetos, $(P, (f, g))$ é um produto de R e S se:

- f é um morfismo de P em R e g é um morfismo de P em S;
- para qualquer objeto X e para quaisquer $\mathbf{E}$-morfismos $f' : X \to R$ e $g' : X \to S$, existe um e um só morfismo $k : X \to P$ tal que $f \circ k = f'$ e $g \circ k = g'$.

Então, atendendo à definição de $\mathbf{E}$, conclui-se que $(P, (f, g))$ não é um produto de R e S, pois i é um morfismo de Q em R, j é um morfismo de Q em S e existe mais do que um morfismo $k : Q \to P$ tal que $f \circ k = i$ e $g \circ k = j$; de facto, u e v são morfismos de Q em P tais que $f \circ u = i$ e $g \circ u = j$, $f \circ v = i$ e $g \circ v = j$ e $u \neq v$.

6. **Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita, então f é um bimorfismo.**

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$ tais que $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita.

Uma vez que $g \circ f$ é um monomorfismo, então, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i, j : D \to A$,

$$(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j \Rightarrow i = j.$$

Atendendo a que f invertível à direita, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f' : B \to A$ tal que $f \circ f' = \mathrm{id}_B$.

Pretendemos mostrar que f é um bimorfismo, isto é, queremos mostrar que f é um monomorfismo e um epimorfismo.

Atendendo às hipóteses anteriores, esta prova é simples. De facto:

- Para quaisquer morfismos $i, j : D \to A$,

$$
\begin{array}{rcll}
f \circ i = f \circ j & \Rightarrow & g \circ (f \circ i) = g \circ (f \circ j) & \\
& \Rightarrow & (g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j & \text{(associatividade de } \circ) \\
& \Rightarrow & i = j & (g \circ f \text{ é um monomorfismo}),
\end{array}
$$

pelo que f é um monomorfismo.

- Para quaisquer morfismos $i, j : B \to D$,

$$
\begin{array}{rcll}
i \circ f = j \circ f & \Rightarrow & (i \circ f) \circ f' = (j \circ f) \circ f' & \\
& \Rightarrow & i \circ (f \circ f') = j \circ (f \circ f') & \text{(associatividade de } \circ) \\
& \Rightarrow & i \circ \mathrm{id}_B = j \circ \mathrm{id}_B & (f' \text{ é o inverso direito de } f) \\
& \Rightarrow & i = j, &
\end{array}
$$

e, portanto, f é um epimorfismo.

Logo f é um epimorfismo.

7. **Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $f, g : A \to B$ morfismos em $\mathbf{C}$ e (I, i) um igualizador de f e g. Mostre que se $\alpha : B \to C$ é um monomorfismo, então (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$.**

   Sejam $f, g : A \to B$ morfismos em $\mathbf{C}$, (I, i) um igualizador de f e g e $\alpha : B \to C$ um monomorfismo.

   Atendendo a que (I, i) é um igualizador de f e g, então i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A tal que:

   (1) $f \circ i = g \circ i$;

   (2) para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $j : J \to A$ tal que $f \circ j = g \circ j$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : J \to I$ tal que $i \circ u = j$.

   Pretendemos mostrar que (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$, isto é, queremos mostrar que:

   (3) $(\alpha \circ f) \circ i = (\alpha \circ g) \circ i$;

   (4) para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to A$ tal que $(\alpha \circ f) \circ k = (\alpha \circ g) \circ k$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $v : K \to I$ tal que $i \circ v = k$.

   De (1) e (2) é simples mostar (3) e (4). De facto:

   (3) Como $f \circ i = g \ \circ i$, então $\alpha \circ (f \circ i) = \alpha \circ (g \circ i)$, donde resulta que $(\alpha \circ f) \circ i = (\alpha \circ g) \circ i$.

   (4) Seja $k : K \to A$ um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $(\alpha \circ f) \circ k = (\alpha \circ g) \circ k$. Então $\alpha \circ (f \circ k) = \alpha \circ (g \circ k)$ e, uma vez que α é um monomorfismo, tem-se $f \circ k = g \circ k$. Logo, por (2), existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $v : K \to I$ tal que $i \circ v = k$.

8. **Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ categorias, $f : A \to B$ um $\mathbf{C}$-morfismo e $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ funtores.**

   (a) **Mostre que GF é um funtor da categoria $\mathbf{C}$ na categoria $\mathbf{E}$.**

   Sejam $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ funtores.

   (1) Uma vez que que F é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$, então a cada objeto X de $\mathbf{C}$, o funtor F associa um objeto $F(X)$ de $\mathbf{D}$. Atendendo a que G é um funtor de $\mathbf{D}$ em $\mathbf{E}$, então a cada objeto $F(X)$ de $\mathbf{D}$, o funtor G associa um objeto $G(F(X))$ de $\mathbf{E}$. Assim, a cada objeto X de $\mathbf{C}$, a correspondência GF associa um objeto GF(X) de $\mathbf{E}$.

   (2) Uma vez que que F é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$, a cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to Y$ é associado um $\mathbf{D}$-morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$. Sendo G um funtor de $\mathbf{D}$ em $\mathbf{E}$, a cada $\mathbf{D}$-morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ é associado um $\mathbf{E}$-morfismo $G(F(f)) : G(F(X)) \to G(F(Y))$. Assim, a cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to Y$, a correspondência GF associa um $\mathbf{E}$-morfismo $GF(f) : GF(X) \to GF(Y)$.

   (3) Para cada objeto X de $\mathbf{C}$,

$$\begin{array}{rcll} GF(\mathrm{id}_X) & = & G(F(\mathrm{id}_X)) & \text{(por definição de } GF) \\ & = & G(\mathrm{id}_{F(X)}) & (F \text{ é funtor}) \\ & = & \mathrm{id}_{G(F(X))} & (G \text{ é funtor}) \\ & = & \mathrm{id}_{GF(X)} & \text{(por definição de } GF). \end{array}$$

   (4) Para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$,

$$\begin{array}{rcll} GF(g \circ f) & = & G(F(g \circ f)) & \text{(por definição de } GF) \\ & = & G(F(g) \circ F(f)) & (F \text{ é funtor}) \\ & = & G(F(g)) \circ G(F(f)) & (G \text{ é funtor}) \\ & = & GF(g) \circ GF(f) & \text{(por definição de } GF). \end{array}$$

   Por (1), (2), (3) e (4) fica provado que GF é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{E}$.

   (b) **Mostre que se F é fiel e pleno e $F(f)$ é invertível à esquerda, então f é invertível à esquerda.**

   Suponhamos que F é um funtor fiel e pleno e que $F(f) : F(A) \to F(B)$ é invertível à esquerda.

   Uma vez que $F(f)$ é invertível à esquerda, existe um $\mathbf{D}$-morfismo $g : F(B) \to F(A)$ tal que

$$g \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(A)}.$$

Pretendemos mostrar que f é invertível à esquerda, i.e. queremos mostrar que existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f' : B \to A$ tal que $f' \circ f = \mathrm{id}_A$.

A prova segue facilmente das hipóteses anteriores. De facto, como f é pleno, existe um morfismo $f' : B \to A$ tal que $F(f') = g$. Logo

$$F(f') \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(A)}$$

e, uma vez que F é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$, vem que

$$F(f' \circ f) = F(\mathrm{id}_A),$$

donde segue que

$$f' \circ f = \mathrm{id}_A,$$

uma vez que F é fiel.

Assim, f é invertível à esquerda.

Cotação: 1.(1.5) 2.(1.75+1.75); 3.(1.75+2.0); 4.(1.75); 5.(1.25+1.25) 6.(1.75) 7.(2.0) 8.(1.5+1.75).