Álgebra Universal e Categorias

2º teste (31 de maio de 2016) — duração: 2 horas

1. Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "m"] \arrow[drr, "l"] & B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "j"] & C \arrow[loop right, "\mathrm{id}_C"] \arrow[d, "i"] \\
F \arrow[loop left, "\mathrm{id}_F"] & E \arrow[loop below, "\mathrm{id}_E"] \arrow[l, "p"] \arrow[rr, "n"] & & D \arrow[loop below, "\mathrm{id}_D"]
\end{tikzcd}$$

onde $j = i \circ h$, $k = h \circ f = h \circ g$, $l = j \circ f = j \circ g = i \circ k = n \circ m$ e $q = p \circ m$.

   (a) Construa a categoria dos objetos sobre F.

   (b) Dê exemplo, caso existam, de um $\mathbf{C}$-morfismo s e de uma subcategoria $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ tais que s não seja monomorfismo em $\mathbf{C}$ e seja monomorfismo em $\mathbf{C}'$.

   (c) Diga, justificando, se (C, h) é um co-igualizador de f e g.

2. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que:

   (a) Se f e g são epimorfismos, então $g \circ f$ é um epimorfismo.

   (b) Se f é um epimorfismo e invertível à esquerda, então f é um isomorfismo.

3. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T. Mostre que se $f : T \to I$ é um morfismo em $\mathbf{C}$, então f é um isomorfismo. Conclua que I e T são objetos zero.

4. Sejam $f, g : A \to B$ e $i : I \to A$ morfismos numa categoria $\mathbf{C}$. Mostre que se $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g), então (I, i) é um igualizador de f e g .

5. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, A_1, A_2 e P objetos de $\mathbf{C}$ e $p_1 : P \to A_1$ e $p_2 : P \to A_2$ morfismos em $\mathbf{C}$ tais que $(P, (p_1, p_2))$ é um produto de A_1 e A_2. Mostre que se $f : Q \to P$ é um isomorfismo em $\mathbf{C}$, então $(Q, (p_1 \circ f, p_2 \circ f))$ é um produto de A_1 e A_2.

6. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e T um objeto terminal da categoria $\mathbf{D}$. Seja F a correspondência que a cada objeto A de $\mathbf{C}$ associa o objeto (A, T) e que a cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : A \to B$ associa o par (f, id_T), onde id_T é o $\mathbf{D}$-morfismo identidade associado a T.

   (a) Mostre que F é um funtor da categoria $\mathbf{C}$ na categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

   (b) Diga, justificando, se F é um funtor: i. fiel. ii. pleno.

Cotação: 1.(1.5+1.5+1.5); 2.(2.0+2.0); 3.(2.5); 4.(2.5); 5.(2.5); 6.(2.0+2.0).