Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação
2015/2016

Álgebra Universal e Categorias

2º teste (31 de maio de 2016) — duração: 2 horas

1. **Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama**

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "m"] \arrow[drr, "l"] & B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "j"] & C \arrow[loop right, "\mathrm{id}_C"] \arrow[d, "i"] \\
F \arrow[loop left, "\mathrm{id}_F"] & E \arrow[loop below, "\mathrm{id}_E"] \arrow[l, "p"] \arrow[rr, "n"'] & & D \arrow[loop below, "\mathrm{id}_D"]
\end{tikzcd}$$

onde $j = i \circ h$, $k = h \circ f = h \circ g$, $l = j \circ f = j \circ g = i \circ k = n \circ m$ **e** $q = p \circ m$**.**

(a) **Construa a categoria dos objetos sobre F.**

A categoria dos objetos sobre F, representada por $\mathbf{C}/\mathbf{F}$, é a categoria tal que:

- os objetos de $\mathbf{C}/\mathbf{F}$ são todos os pares (X, s), onde A é um objeto de $\mathbf{C}$ e $s : X \to F$ é um morfismo de $\mathbf{C}$;
- dados objetos (X, s) e (Y, t) de $\mathbf{C}/\mathbf{F}$, um $\mathbf{C}/\mathbf{F}$-morfismo de (X, s) em (Y, t) é um $\mathbf{C}$-morfismo $v : X \to Y$ tal que $t \circ v = s$;
- para cada objeto (X, s) de $\mathbf{C}/\mathbf{F}$, o morfismo identidade $\mathrm{id}_{(X,s)}$ é o $\mathbf{C}$-morfismo $\mathrm{id}_X : X \to X$;
- dados morfismos $w : (X, s) \to (Y, t)$ e $z : (Y, t) \to (Z, v)$ a sua composição $z \circ w : (X, s) \to (Z, v)$ é o $\mathbf{C}$-morfismo $z \circ w : X \to Z$.

Assim, a categoria $\mathbf{C}/\mathbf{F}$ é a categoria representada pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A, q) \arrow[loop left, "\mathrm{id}_{(A,q)}"] \arrow[r, "q"] \arrow[d, "m"'] & (F, \mathrm{id}_F) \arrow[loop right, "\mathrm{id}_{(F,\mathrm{id}_F)}"] \\
(E, p) \arrow[loop left, "\mathrm{id}_{(E,p)}"] \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

(b) **Dê exemplo, caso existam, de um $\mathbf{C}$-morfismo s e de uma subcategoria $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ tais que s não seja monomorfismo em $\mathbf{C}$ e seja monomorfismo em $\mathbf{C}'$.**

Seja $\mathbf{C}'$ a categoria representada pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[loop left, "\mathrm{id}_B"] \arrow[r, "h"] & C \arrow[loop right, "\mathrm{id}_C"]
\end{tikzcd}$$

Claramente, $\mathbf{C}'$ é uma subcategoria de $\mathbf{C}$, pois

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}') \subseteq \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$,
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}') \subseteq \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$,
- para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}')$, o morfismo id_X em $\mathbf{C}'$ é o morfismo id_X em $\mathbf{C}$;
- a composição de morfismos em $\mathbf{C}'$ é a induzida pela composição de morfismos em $\mathbf{C}$.

Considerando o morfismo h, verifica-se que h é um monomorfismo em $\mathbf{C}'$, mas não é um monomorfismo em $\mathbf{C}$ (pois $h \circ f = h \circ g$ e $f \neq g$).

(c) **Diga, justificando, se (C, h) é um co-igualizador de f e g.**

O par (C, h) é um co-igualizador de f e g, pois:

- $h \circ f = h \circ g$;
- se $r : B \to X$ é um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $r \circ f = r \circ g$, então existe um, e um só, $\mathbf{C}$-morfismo $u : C \to X$ tal que $u \circ h = r$. De facto, se r é um morfismo nas condições anateriores, temos dois casos a considerar: $r = h$ ou $r = j$. Se $r = h$, existe um, e um só morfismo $u : C \to C$ tal que $h = u \circ h$; tal morfismo é o morfismo id_C. Se $r = j$, existe um, e um só, morfismo $u : C \to D$ tal que $u \circ h = j$, tal morfismo é o morfismo $i : C \to D$.

2. **Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que:**

(a) **Se f e g são epimorfismos, então $g \circ f$ é um epimorfismo.**

Sejam f e g epimorfismos da categoria $\mathbf{C}$. Então $g \circ f$ é um epimorfismo, isto é, para quaisquer morfismos $i, j : C \to D$,
$$i \circ (g \circ f) = j \circ (g \circ f) \Rightarrow i = j.$$

De facto, como f e g são epimorfismos, tem-se

$$\begin{array}{rcll} i \circ (g \circ f) = j \circ (g \circ f) & \Rightarrow & (i \circ g) \circ f = (j \circ g) \circ f & \\ & \Rightarrow & i \circ g = j \circ g & \text{(pois } f \text{ é um epimorfismo)} \\ & \Rightarrow & i = j & \text{(pois } g \text{ é um epimorfismo).} \end{array}$$

(b) **Se f é um epimorfismo e invertível à esquerda, então f é um isomorfismo.**

Admitamos que f é um epimorfismo e invertível à esquerda. Uma vez que f é invertível à esquerda, existe $f' : B \to A$ tal que $f' \circ f = \mathrm{id}_A$. Então $f \circ (f' \circ f) = f$, donde $(f \circ f') \circ f = \mathrm{id}_B \circ f$. Por conseguinte, como f é um epimorfismo, tem-se $f \circ f' = \mathrm{id}_B$. Logo f é invertível à direita. Uma vez que que f é invertível à direita e à esquerda, concluímos que f é um isomorfismo.

3. **Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T e seja $f : T \to I$ um morfismo de $\mathbf{C}$. Mostre que f é um isomorfismo. Conclua que I e T são objetos zero.**

Admitamos que I é um objeto inicial, T é um objeto terminal e que $f : T \to I$ é um $\mathbf{C}$-morfismo. Uma vez que T é um objeto terminal, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $u : I \to T$. Logo $u \circ f : T \to T$ é um $\mathbf{C}$-morfismo e tem-se $u \circ f = \mathrm{id}_T$. De facto, como $u \circ f : T \to T$ e $\mathrm{id}_T : T \to T$ são morfismos de $\mathbf{C}$ e existe um único $\mathbf{C}$-morfismo de T em T (uma vez que T é um objeto terminal), tem-se $u \circ f = \mathrm{id}_T$. De modo análogo conclui-se que $f \circ u = \mathrm{id}_I$, pois $f \circ u : I \to I$ e $\mathrm{id}_I : I \to I$ são morfismos em $\mathbf{C}$ e existe um único morfismo de I em I (uma vez que I é um objeto inicial). Assim, f é invertível à direita e à esquerda e, portanto, f é um isomorfismo.

Um objeto que seja isomorfo a um objeto inicial (respetivamente, terminal) também é um objeto inicial (respetivamente, terminal). Logo, como I e T são isomorfos, concluímos que I e T são objetos simultaneamente iniciais e terminais, isto é, são objetos zero.

4. **Sejam $f, g : A \to B$ e $i : I \to A$ morfismos numa categoria $\mathbf{C}$. Mostre que se $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g), então (I, i) é um igualizador de f e g.**

Admitamos que $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g), i.e., admitamos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

é um quadrado cartesiano. Então:

(1) $f \circ i = g \circ i$;

(2) para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f' : X \to A$ e $g' : X \to B$ tais que $f \circ f' = g \circ g'$, existe um, e um só, $\mathbf{C}$-morfismo $u : X \to I$ tal que $i \circ u = f'$ e $i \circ u = g'$.

Pretendemos provar que (I, i) é um igualizador de f e g, isto é, temos de provar que:

(i) $f \circ i = g \circ i$;

(ii) para todo o $\mathbf{C}$-morfismo $j : X \to A$ tal que $f \circ j = g \circ j$, existe um, e um só, $\mathbf{C}$-morfismo $v : X \to I$ tal que $i \circ v = j$.

Considerando (1) e (2) a prova de (i) e (ii) é imediata. De facto,

(i) De (1) é imediato que $f \circ i = g \circ i$.

(ii) se $j : X \to A$ é um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $f \circ j = g \circ j$, então de (2) (considerando $f' = j$ e $g' = j$) resulta que existe um e, um só morfismo $v : X \to I$ tal que $i \circ v = j$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "v"] \arrow[drr, "j"] \arrow[ddr, "j"'] & & \\
& I \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

5. **Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, A_1, A_2 e P objetos de $\mathbf{C}$ e $p_1 : P \to A_1$ e $p_2 : P \to A_2$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $(P, (p_1, p_2))$ é um produto de A_1 e A_2. Mostre que se $f : Q \to P$ é um isomorfismo em $\mathbf{C}$, então $(Q, (p_1 \circ f, p_2 \circ f))$ é um produto de A_1 e A_2.**

Sejam $(P, (p_1, p_2))$ um produto de A_1 e A_2 e $f : Q \to P$ um isomorfismo.

Uma vez que $(P, (p_1, p_2))$ é um produto de A_1 e A_2, então, para quaisquer morfismos $f_1 : X \to A_1$ e $f_2 : X \to A_2$, existe um, e um só morfismo, $u : X \to P$ tal que $p_1 \circ u = f_1$ e $p_2 \circ u = f_2$.

Atendendo a que f é um isomorfismo, sabe-se que existe um morfismo $f^{-1} : P \to Q$ tal que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_P$ e $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_Q$.

Pretendemos mostrar que $(Q, (p_1 \circ f, p_2 \circ f))$ é um produto de A_1 e A_2, i.e., temos de mostrar que:

(1) $p_1 \circ f$ é um morfismo de Q em A_1 e $p_2 \circ f$ é um morfismo de Q em A_2;

(2) para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $g_1 : Y \to A_1$ e $g_2 : Y \to A_2$, existe um, e um só, morfismo $v : Y \to Q$ tal que $(p_1 \circ f) \circ v = g_1$ e $(p_2 \circ f) \circ v = g_2$.

A prova de (1) é imediata, atendendo à definição de composição de morfismos. A prova de (2) também é simples. De facto, se $g_1 : Y \to A_1$ e $g_2 : Y \to A_2$ são $\mathbf{C}$-morfismos, então, uma vez que $(P, (p_1, p_2))$ é um produto de A_1 e A_2, existe um, e um só morfismo $u : Y \to P$ tal que $p_1 \circ u = g_1$ e $p_2 \circ u = g_2$.

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "g_2"] & \\
A_1 & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & A_2
\end{tikzcd}$$

Assim, $v = f^{-1} \circ u$ é um $\mathbf{C}$-morfismo e tem-se

$$(p_1 \circ f) \circ v = (p_1 \circ f) \circ (f^{-1} \circ u) = p_1 \circ u = g_1,$$
$$(p_2 \circ f) \circ v = (p_2 \circ f) \circ (f^{-1} \circ u) = p_2 \circ u = g_2.$$

Além disso, $v = f^{-1} \circ u$ é o único $\mathbf{C}$-morfismo de Y em Q tal que $(p_1 \circ f) \circ v = g_1$ e $(p_2 \circ f) \circ v = g_2$. Com efeito, se $v' : Y \to Q$ é um $\mathbf{C}$-morfismo tal que

$$(p_1 \circ f) \circ v' = g_1 \text{ e } (p_2 \circ f) \circ v' = g_2,$$

tem-se

$$p_1 \circ (f \circ v') = g_1 \text{ e } p_2 \circ (f \circ v') = g_2$$

e atendendo à unicidade de u segue que $f \circ v' = u$. Logo $v' = f^{-1} \circ u = v$.

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[ddl, "g_1"'] \arrow[ddr, "g_2"] \arrow[dd, bend left, "u"] & \\
 & Q \arrow[dl, "p_1 \circ f"'] \arrow[dr, "p_2 \circ f"] & \\
A_1 & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] \arrow[u, "f^{-1}"] & A_2
\end{tikzcd}
$$

6. **Sejam C e D categorias e T um objeto terminal da categoria D. Seja F a correspondência que a cada objeto A de C associa o objeto (A, T) e que a cada C-morfismo $f : A \to B$ associa o par (f, id_T), onde id_T é o D-morfismo identidade associado a T.**

(a) **Mostre que F é um funtor da categoria C na categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.**

Da definição de F segue que:

(i) Para cada objeto X de $\mathbf{C}$, $F(X) = (X, T)$ é um objeto de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ (pois X é um objeto de $\mathbf{C}$ e T é um objeto de $\mathbf{D}$);

(ii) Para cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to Y$, $F(f)) = (f, \mathrm{id}_T)$ é um morfismo de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ (uma vez que f é um $\mathbf{C}$-morfismo e id_T é um $\mathbf{D}$-morfismo).

(iii) Para cada objeto X de $\mathbf{C}$,

$$F(\mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_T) = \mathrm{id}_{(X,T)} = \mathrm{id}_{F(X)}.$$

(iv) Para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$,

$$F(g \circ f) = (g \circ f, \mathrm{id}_T) = (g \circ f, \mathrm{id}_T \circ \mathrm{id}_T) = (g, \mathrm{id}_T) \circ (f, \mathrm{id}_T) = F(g) \circ F(f).$$

De (i), (ii), (iii) e (iv) conclui-se que F é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

(b) **Diga, justificando, se F é um funtor:**

i. **fiel.**

O funtor F é fiel se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f, g : X \to Y$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Atendendo a que, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f, g : X \to Y$,

$$\begin{aligned} F(f) = F(g) &\Rightarrow (f, \mathrm{id}_T) = (g, \mathrm{id}_T) \\ &\Rightarrow f = g, \end{aligned}$$

concluímos que F é fiel.

ii. **pleno.**

O funtor F é pleno pois, para quaisquer objetos X e Y de $\mathbf{C}$ e para qualquer $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismo $(g, h) : F(X) \to F(Y)$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to Y$ tal que $F(f) = (g, h)$.

De facto, se X e Y são objetos de $\mathbf{C}$ e $(g, h) : F(X) \to F(Y)$ é um morfismo de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, então g é um $\mathbf{C}$-morfismo de X em Y, h é um $\mathbf{D}$-morfismo de T em T e, uma vez que T é um objeto terminal, tem-se $h = \mathrm{id}_T$. Logo, atendendo a que $g : X \to Y$ é um $\mathbf{C}$-morfismo tal que

$$F(g) = (g, \mathrm{id}_T) = (g, h),$$

conclui-se que F é pleno.

Cotação: 1.(1.5+1.5+1.5); 2.(2.0+2.0); 3.(2.5); 4.(2.5); 5.(2.5); 6.(2.0+2.0).