Universidade do Minho — Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações — 2015/2016

Álgebra Universal e Categorias

1º teste (19 de abril de 2016) — duração: 2 horas

1. Sejam

   - $R = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$;
   - $\mathcal{R}_1 = (R; \wedge^{\mathcal{R}_1}, \vee^{\mathcal{R}_1})$ o reticulado correspondente ao diagrama de Hasse representado na figura 1. e tal que $\wedge^{\mathcal{R}_1}$ e $\vee^{\mathcal{R}_1}$ representam, respetivamente, as operações de ínfimo ($\wedge$) e supremo ($\vee$);
   - $\mathcal{R}_2 = (\mathcal{P}(R); \wedge^{\mathcal{R}_2}, \vee^{\mathcal{R}_2})$ o reticulado onde $\mathcal{P}(R) = \{X \mid X \subseteq R\}$ e $\wedge^{\mathcal{R}_2}$ e $\vee^{\mathcal{R}_2}$ representam, respetivamente, a interseção e a união de conjuntos.

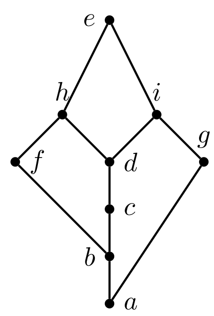

figura 1.

   (a) Para cada um dos conjuntos A_i, $i \in \{1, 2\}$, a seguir indicados, diga se A_i é um subuniverso de $\mathcal{R}_1$ e determine $Sg^{\mathcal{R}_1}(A_i)$. Justifique a sua resposta.

      i. $A_1 = \{r \in R : r \wedge f = f\} \cup \{r \in R : r \wedge g = g\}$.

      ii. $A_2 = \{r \in R : r \wedge (f \vee g) = f \vee g\}$.

   (b) Considere a aplicação $\alpha : R \to \mathcal{P}(R)$ definida por $\alpha(x) = \{r \in R \,|\, r \wedge x = x\}$, para cada $x \in R$. Diga, justificando, se α é um homomorfismo de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$.

   (c) Diga se $\mathcal{R}_1$ é um reticulado modular. Justifique a sua resposta.

2. Seja $(R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Um subconjunto não vazio F de R diz-se um *filtro de* R se:

   (F1) $\forall x, y \in R \;\; (x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F)$;

   (F2) $\forall x \in F, \forall y \in R \;\; (x \vee y = y \Rightarrow y \in F)$.

   Mostre que todo o filtro de R é um subniverso de R.

3. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ homomorfismos.

   (a) Mostre que $\beta \circ \alpha$ é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$.

   (b) Mostre que $\ker \alpha$ é uma congruência em $\mathcal{A}$.

   (c) Mostre que $\ker\alpha \subseteq \ker(\beta \circ \alpha)$. Conclua que se $\beta \circ \alpha$ é um monomorfismo, então α é um monomorfismo.

4. (a) Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta, \theta^* \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Mostre que (θ, θ^*) é um par de congruências fator em $\mathcal{A}$ se e só se $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$ e $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$.

   (b) Seja $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, f^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1) onde $f^{\mathcal{A}} : \{a, b, c, d\} \to \{a, b, c, d\}$ é a operação definida por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	d	c	d	c

      i. Sejam $\theta_1 = \theta(a, b)$ e $\theta_2 = \theta(a, c) \vee \theta(b, d)$. Determine θ_1 e θ_2. Justifique que (θ_1, θ_2) é um par de conguências fator.

      ii. Justifique que a álgebra $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível. Dê exemplo de álgebras $\mathcal{A}_1 = (A_1, f^{\mathcal{A}_1})$ e $\mathcal{A}_2 = (A_2, f^{\mathcal{A}_2})$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

5. Considere os operadores H e P. Mostre que:

   (a) H é um operador idempotente.

   (b) HP é um operador de fecho.

Cotação: 1.(1.5+1.25+1.25); 2.(1.75); 3.(2.0+2.0+1.5); 4.(2.0+2.0+1.5); 5.(1.5+1.75)