Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação
2015/2016

Álgebra Universal e Categorias

1º teste (19 de abril de 2016) — duração: 2 horas

1. **Sejam**

- $R = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$;
- $\mathcal{R}_1 = (R; \wedge^{\mathcal{R}_1}, \vee^{\mathcal{R}_1})$ **o reticulado correspondente ao diagrama de Hasse representado na figura 1. e tal que** $\wedge^{\mathcal{R}_1}$ **e** $\vee^{\mathcal{R}_1}$ **representam, respetivamente, as operações de ínfimo** ($\wedge$) **e supremo** ($\vee$);
- $\mathcal{R}_2 = (\mathcal{P}(R); \wedge^{\mathcal{R}_2}, \vee^{\mathcal{R}_2})$ **o reticulado onde** $\mathcal{P}(R) = \{X \mid X \subseteq R\}$ **e** $\wedge^{\mathcal{R}_2}$ **e** $\vee^{\mathcal{R}_2}$ **representam, respetivamente, a interseção e a união de conjuntos.**

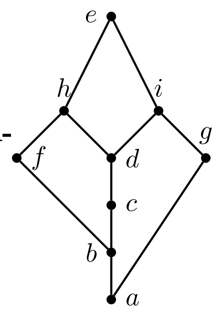


figura 1.

(a) **Para cada um dos conjuntos** A_i, $i \in \{1, 2\}$, **a seguir indicados, diga se** A_i **é um subuniverso de** $\mathcal{R}_1$ **e determine** $Sg^{\mathcal{R}_1}(A_i)$. **Justifique a sua resposta.**

i. $A_1 = \{r \in R : r \wedge f = f\} \cup \{r \in R : r \wedge g = g\}$.

Tem-se

$$\begin{aligned} A_1 = \{r \in R : r \wedge f = f\} \cup \{r \in R : r \wedge g = g\} &= \{r \in R : f \leq r\} \cup \{r \in R : g \leq r\} \\ &= \{f, h, e\} \cup \{g, i, e\} \\ &= \{f, g, h, i, e\}. \end{aligned}$$

O conjunto A_1 é um subuniverso de $\mathcal{R}_1$ se $A_1 \subseteq R$ e, para quaisquer $x, y \in A_1$, $x \wedge y \in A_1$ e $x \vee y \in A_1$. Então, como $h, i \in A_1$ e $h \wedge i = d \notin A_1$, concluímos que A_1 não é um subuniverso de $\mathcal{R}_1$.

Por definição, $Sg^{\mathcal{R}_1}(A_1)$ é o menor subuniverso de $\mathcal{R}_1$ que contém A_1. Assim, $A_1 \subseteq Sg^{\mathcal{R}_1}(A_i)$ e, uma vez que $Sg^{\mathcal{R}_1}(A_1)$ é fechado para as operações $\wedge$ e $\vee$, os elementos

$$h \wedge i = d, f \wedge g = a, d \wedge f = b$$

pertencem a $Sg^{\mathcal{R}_1}(A_1)$. Logo $\{a, b, d, e, f, g, h, i\} \subseteq Sg^{\mathcal{R}_1}(A_1)$. Atendendo a que c não é ínfimo nem supremo de qualquer dos elementos do conjunto $\{a, b, d, e, f, g, h, i\}$, conclui-se que $\{a, b, d, e, f, g, h, i\}$ é um subuniverso de $\mathcal{R}_1$. Claramente, qualquer outro subuiverso de $\mathcal{R}_1$ que contenha A_1 tem de conter $\{a, b, d, e, f, g, h, i\}$. Portanto, $Sg^{\mathcal{R}_1}(A_1) = \{a, b, d, e, f, g, h, i\}$.

ii. $A_2 = \{r \in R : r \wedge (f \vee g) = f \vee g\}$.

Tem-se

$$\begin{aligned} A_2 = \{r \in R : r \wedge (f \vee g) = f \vee g\} &= \{r \in R : (f \vee g) \leq r\} \\ &= \{r \in R : e \leq r\} \\ &= \{e\}. \end{aligned}$$

Obviamente, $A_2 \subseteq R$ e A_2 é fechado para as operações $\wedge$ e $\vee$, uma vez que

$$e \wedge e = e \text{ e } e \vee e = e.$$

Logo A_2 é um subuniverso de $\mathcal{R}_1$.

Uma vez que A_2 é um subuniverso de $\mathcal{R}_1$ é imediato que $Sg^{\mathcal{R}_1}(A_2) = A_2$.

(b) **Considere a aplicação** $\alpha : R \to \mathcal{P}(R)$ **definida por** $\alpha(x) = \{r \in R \mid r \wedge x = x\}$, **para cada** $x \in R$. **Diga, justificando, se** α **é um homomorfismo de** $\mathcal{R}_1$ **em** $\mathcal{R}_2$.

A aplicação α é um homomorfismo $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ se, para quaisquer $x, y \in R$,

$$\alpha(x \wedge^{\mathcal{R}_1} y) = \alpha(x) \wedge^{\mathcal{R}_2} \alpha(y) \text{ e } \alpha(x \vee^{\mathcal{R}_1} y) = \alpha(x) \vee^{\mathcal{R}_2} \alpha(y).$$

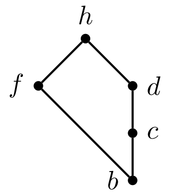
Ora, atendendo à alínea anterior, conclui-se de imediato que α não é um homomorfismo de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$, uma vez que

$$\alpha(f \vee^{\mathcal{R}_1} g) = A_2 \neq A_1 = \alpha(f) \cup \alpha(g) = \alpha(f) \vee^{\mathcal{R}_2} \alpha(g).$$

(c) **Diga se $\mathcal{R}_1$ é um reticulado modular. Justifique a sua resposta.**

Um reticulado é modular se e só se não tem qualquer subreticulado isomorfo ao reticulado N_5.

Então, uma vez que o reticulado



é um subreticulado de $\mathcal{R}_1$ (pois, $\{b, c, d, h, f\} \subseteq R$ e $\{b, c, d, h, f\}$ é fechado para as operações $\wedge$ e $\vee$) e é isomorfo ao N_5, conclui-se que $\mathcal{R}_1$ não é modular.

2. **Seja $(R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Um subconjunto não vazio F de R diz-se um *filtro de* R se:**

(F1) $\forall x, y \in R \ (x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F)$ **;**

(F2) $\forall x \in F, \forall y \in R \ (x \vee y = y \Rightarrow y \in F)$**.**

Mostre que todo o filtro de R é um subniverso de R.

Um subconjunto S de R diz-se um subuniverso de R se $S \subseteq R$ e, para quaisquer $a, b \in S$, $a \wedge b \in S$ e $a \vee b \in S$.

Dado um filtro F de R, facilmente se verifica que F é um subuniverso de R. De facto, pela definição de F é imediato que $F \subseteq R$. Além disso, para quaisquer $a, b \in F$,

- $a \wedge b \in F$, atendendo a (F1);
- $a \vee b \in F$, uma vez que $a \in F$, $a \vee b \in R$, $a \vee (a \vee b) = a \vee b$ e atendendo a (F2).

3. **Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ homomorfismos.**

(a) **Mostre que $\beta \circ \alpha$ é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$.**

Uma vez que α é uma aplicação de A em B e β é uma aplicação de B em C, por definição de composição de β e α segue que $\beta \circ \alpha$ é uma aplicação de A em C. Além disso, para qualquer símbolo de operação n-ário f e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\begin{array}{rcll} (\beta \circ \alpha)(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & = & \beta(\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n))) & \\ & = & \beta(f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))) & (\text{pois } \alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \\ & = & f^{\mathcal{C}}(\beta(\alpha(a_1)), \ldots, \beta(\alpha(a_n))) & (\text{pois } \beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \end{array}$$

Desta forma, provámos que $\beta \circ \alpha$ é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$.

(b) **Mostre que $\ker \alpha$ é uma congruência em $\mathcal{A}$.**

A relação
$$\ker \alpha = \{(x, y) \in A^2 \mid \alpha(x) = \alpha(y)\}$$
é uma congruência em $\mathcal{A}$ se é uma relação de equivalência em A e satisfaz a propriedade de substituição.

Comecemos por verificar que $\ker \alpha$ é uma relação de equivalência em A, i.e., que é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva:

- Para qualquer $a \in A$, $\alpha(a) = \alpha(a)$. Logo, para todo $a \in A$, $(a, a) \in \ker \alpha$ e, portanto, $\ker \alpha$ é reflexiva.
- Para quaisquer $a, b \in A$,

$$(a, b) \in \ker \alpha \Rightarrow \alpha(a) = \alpha(b) \Rightarrow \alpha(b) = \alpha(a) \Rightarrow (b, a) \in \ker \alpha.$$

Logo $\ker \alpha$ é simétrica.

- Para quaisquer $a, b, c, \in A$,

$$\begin{array}{rcl}(a,b) \in \ker\alpha \text{ e } (b,c) \in \ker\alpha & \Rightarrow & \alpha(a) = \alpha(b) \text{ e } \alpha(b) = \alpha(c)\\ & \Rightarrow & \alpha(a) = \alpha(c)\\ & \Rightarrow & (a,c) \in \ker\alpha.\end{array}$$

Portanto, $\ker\alpha$ é transitiva.

Também é simples verificar que $\ker\alpha$ satisfaz a propriedade de substituição. De facto, para qualquer símbolo de operação n-ário f e para quaisquer $a_1, \dots a_n$, $b_1, \dots, b_n \in A$,

$$\begin{array}{rcl}(\forall i \in \{1,\dots,n\}, (a_i, b_i) \in \ker\alpha) & \Rightarrow & \alpha(a_1) = \alpha(b_1), \dots, \alpha(a_n) = \alpha(b_n)\\ & \Rightarrow & f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\alpha(b1), \dots, \alpha(b_n))\\ & \Rightarrow & \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots a_n)) = \alpha(f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots b_n))\\ & \Rightarrow & (f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots a_n), (f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots b_n)) \in \ker\alpha.\end{array}$$

(c) **Mostre que $\ker\alpha \subseteq \ker(\beta \circ \alpha)$. Conclua que se $\beta \circ \alpha$ é um monomorfismo, então α é um monomorfismo.**

Para quaisquer $a, b \in A$,

$$\begin{array}{rcl}(a,b) \in \ker\alpha & \Rightarrow & \alpha(a) = \alpha(b)\\ & \Rightarrow & \beta(\alpha(a)) = \beta(\alpha(b))\\ & \Rightarrow & (\beta \circ \alpha)(a) = (\beta \circ \alpha)(b)\\ & \Rightarrow & (a,b) \in \ker(\beta \circ \alpha).\end{array}$$

Logo $\ker\alpha \subseteq \ker(\beta \circ \alpha)$.

Se $\beta \circ \alpha$ é um monomorfismo, tem-se $\ker(\beta \circ \alpha) = \triangle_A$. Então, uma vez que $\ker\alpha \subseteq \ker(\beta \circ \alpha)$, tem-se $\ker\alpha = \triangle_A$ e, portanto, α é um monomorfismo.

4. (a) **Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta, \theta^* \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Mostre que (θ, θ^*) é um par de congruências fator em $\mathcal{A}$ se e só se $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$ e $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$.**

($\Rightarrow$) Seja (θ, θ^*) um par de congruências fator em $\mathcal{A}$. Então θ e θ^* são permutáveis, $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$ e $\theta \vee \theta^* = \nabla_A$. Uma vez que $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$, resta provar que $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$. Esta prova é imediata. De facto, como θ e θ^* são permutáveis, tem-se $\theta \vee \theta^* = \theta \circ \theta^*$, pelo que $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$.

($\Leftarrow$) Sejam θ e θ^* congruências em $\mathcal{A}$ tais que $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$ e $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$. Então $\theta^* \circ \theta \subseteq \theta \circ \theta^* = \triangle_A$, donde resulta que $\theta^* \circ \theta = \theta \circ \theta^*$ e, portanto, θ e θ^* são permutáveis. Atendendo a que θ e θ^* são permutáveis, tem-se $\theta \vee \theta^* = \theta \circ \theta^*$, pelo que $\theta \vee \theta^* = \nabla_A$. Logo θ e θ^* são congruências permutáveis e tais que $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$ e $\theta \vee \theta^* = \nabla_A$, i.e., (θ, θ^*) é um par de congruências fator.

(b) **Seja $\mathcal{A} = (\{a,b,c,d\}, f^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1) onde $f^{\mathcal{A}} : \{a,b,c,d\} \to \{a,b,c,d\}$ é a operação definida por**

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	d	c	d	c

i. **Sejam $\theta_1 = \theta(a,b)$ e $\theta_2 = \theta(a,c) \vee \theta(b,d)$. Determine θ_1 e θ_2. Justifique que (θ_1, θ_2) é um par de conguências fator.**

A relação $\theta(a,b)$ é a menor relação de congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a,b)\}$. Então $(a,b) \in \theta(a,b)$ e, uma vez que $\theta(a,b)$ é uma relação reflexiva, tem-se

$$\triangle_A = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\} \subseteq \theta(a,b).$$

Atendendo a que $\theta(a,b)$ é simétrica, transitiva e satisfaz a propriedade de substituição, verifica-se também o seguinte

$$\begin{array}{l}(a,b) \in \theta(a,b) \Rightarrow (b,a) \in \theta(a,b),\\ (a,b) \in \theta(a,b) \Rightarrow (f(a), f(b)) = (d,c) \in \theta(a,b),\\ (b,a) \in \theta(a,b) \Rightarrow (f(b), f(a)) = (c,d) \in \theta(a,b)\\ (d,c) \in \theta(a,b) \Rightarrow (f(d), f(c)) = (c,d) \in \theta(a,b),\\ (c,d) \in \theta(a,b) \Rightarrow (f(c), f(d)) = (d,c) \in \theta(a,b).\end{array}$$

Logo

$$\triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\} \subseteq \theta(a,b).$$

Uma vez que $\triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$ é uma congruência em $\mathcal{A}$ e qualquer outra congruência que contenha {(a,b)} tem de conter $\triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$, tem-se

$$\theta_1 = \theta(a,b) = \triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}.$$

Atendendo a que $\theta_2 = \theta(a,c) \vee \theta(b,d)$ é a menor relação de congruência em $\mathcal{A}$ que contem $\{(a,c),(b,d)\}$, tem-se

$$\begin{array}{l}
\{(a,c),(b,d)\} \subseteq \theta_2,\\
\triangle_A \subseteq \theta_2,\\
(a,c) \in \theta_2 \Rightarrow (c,a) \in \theta_2,\\
(b,d) \in \theta_2 \Rightarrow (d,b) \in \theta_2,\\
(a,c) \in \theta_2 \Rightarrow (f(a),f(c)) = (d,d) \in \theta_2,\\
(c,a) \in \theta_2 \Rightarrow (f(c),f(a)) = (d,d) \in \theta_2,\\
(b,d) \in \theta_2 \Rightarrow (f(b),f(d)) = (c,c) \in \theta_2,\\
(d,b) \in \theta_2 \Rightarrow (f(d),f(b)) = (c,c) \in \theta_2,
\end{array}$$

donde se conclui que $\triangle_A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\} \subseteq \theta_2$. Uma vez que $\triangle_A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$ é uma congruência em $\mathcal{A}$ e qualquer outra congruência que contenha {(a,c),(b,d)} tem de conter $\triangle_A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$, tem-se

$$\theta_2 = \triangle_A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}.$$

Claramente,

$$\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$$

e

$$\begin{array}{rcl}
\theta_1 \circ \theta_2 & = & \{(x,z) \in A^2 \mid \exists y \in A, (x,y) \in \theta_2 \text{ e } (y,z) \in \theta_1\}\\
& = & \triangle_A \cup \{(a,b),(b,a)(c,d),(d,c),(a,c),(c,a),(b,d),(d,b),(a,d),(d,a),(b,c),(c,b)\}\\
& = & \nabla_A.
\end{array}$$

Logo, pela alínea anterior, concluímos que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator.

ii. **Justifique que a álgebra $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível. Dê exemplo de álgebras $\mathcal{A}_1 = (A_1, f^{\mathcal{A}_1})$ e $\mathcal{A}_2 = (A_2, f^{\mathcal{A}_2})$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.**

A álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível se e só se $\triangle_A$ e ∇_A são as únicas congruências fator de $\mathcal{A}$. Então, como θ_1 e θ_2 são congruências fator de $\mathcal{A}$ e $\theta_1, \theta_2 \notin \{\triangle_A, \nabla_A\}$, conclui-se que $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível. Uma vez que θ_1 e θ_2 são congruências fator de $\mathcal{A}$, tem-se $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_2$, onde

- $\mathcal{A}/\theta_1 = (A/\theta_1, f^{\mathcal{A}/\theta_1})$ é a álgebra tal que $A/\theta_1 = \{[a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_1}\}$ e $f^{\mathcal{A}/\theta_1} : A/\theta_1 \to A/\theta_1$ é a operação definida por $f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}) = [f(a)]_{\theta_1} = [c]_{\theta_1}$ e $f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}) = [f(c)]_{\theta_1} = [c]_{\theta_1}$,
- $\mathcal{A}/\theta_2 = (A/\theta_2, f^{\mathcal{A}/\theta_2})$ é a álgebra tal que $A/\theta_2 = \{[a]_{\theta_2}, [b]_{\theta_2}\}$ e $f^{\mathcal{A}/\theta_2} : A/\theta_2 \to A/\theta_2$ é a operação definida por $f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2}) = [f(a)]_{\theta_2} = [b]_{\theta_2}$ e $f^{\mathcal{A}/\theta_2}([b]_{\theta_2}) = [f(b)]_{\theta_2} = [a]_{\theta_2}$,

5. **Considere os operadores H e P. Mostre que:**

(a) **H é um operador idempotente.**

Pretendemos mostrar que, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, $H^2(\mathbf{K}) = H(\mathbf{K})$.

$[H(\mathbf{K}) \subseteq H^2(\mathbf{K})]$ Para qualquer operador $O \in \{H, I, S, P, Ps\}$ e para qualquer classe $\mathbf{K}$ de álgebras do mesmo tipo, tem-se $\mathbf{K} \subseteq O(\mathbf{K})$. Logo $\mathbf{K} \subseteq H(\mathbf{K})$, donde segue que $H(\mathbf{K}) \subseteq H^2(\mathbf{K})$.

$[H^2(\mathbf{K}) \subseteq H(\mathbf{K})]$ Seja $\mathbf{A} \in H^2(\mathbf{K})$. Então $A = \alpha(\mathcal{B})$, para algum epimorfismo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, onde $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$. Uma vez que $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$, então $\mathcal{B} = \gamma(\mathcal{C})$, para algum epimorfismo $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, onde $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Logo $\mathcal{A} = (\alpha \circ \gamma)(\mathcal{C})$, onde $\alpha \circ \gamma$ é um epimorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Logo $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$.

Desta forma, provámos que $H^2(\mathbf{K}) = H(\mathbf{K})$ e, portanto, H é idempotente.

(b) **HP é um operador de fecho.**

HP é um operador de fecho se, para quaisquer classes $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$ de álgebras do mesmo tipo,

(i) $\mathbf{K}_1 \subseteq HP(\mathbf{K}_1)$,
(ii) $(HP)^2(\mathbf{K}_1) = HP(\mathbf{K}_1)$,
(iii) $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \Rightarrow HP(\mathbf{K}_1) \subseteq HP(\mathbf{K}_2)$,

(i) Para qualquer operador $O \in \{H, I, S, P, Ps\}$ e para qualquer classe $\mathbf{K}$ de álgebras do mesmo tipo, tem-se $\mathbf{K} \subseteq O(\mathbf{K})$. Logo $\mathbf{K}_1 \subseteq P(\mathbf{K}_1)$ e $P(\mathbf{K}_1) \subseteq HP(\mathbf{K}_1)$, donde segue que $\mathbf{K}_1 \subseteq HP(\mathbf{K}_1)$.

(ii) Por um lado, de (i) segue que, para qualquer classe $\mathbf{K}_1$ de álgebras do mesmo tipo, $P(\mathbf{K}_1) \subseteq PHP(\mathbf{K}_1)$, donde $HP(\mathbf{K}_1) \subseteq HPHP(\mathbf{K}_1) = (HP)^2(\mathbf{K}_1)$. Por outro lado,

$$
\begin{array}{rcll}
(HP)^2(\mathbf{K}_1) & = & HPHP(\mathbf{K}_1) & \\
 & \subseteq & H^2PP(\mathbf{K}_1) & (\text{pois } PH \leq HP) \\
 & = & HPP(\mathbf{K}_1) & (\text{ pois } H^2 = H) \\
 & \subseteq & HIPIP(\mathbf{K}_1) & (\text{ pois } P \leq IP) \\
 & = & HIP(\mathbf{K}_1) & (\text{ pois } (IP)^2 = IP) \\
 & \subseteq & HHP(\mathbf{K}_1) & (\text{ pois } I \leq H) \\
 & = & HP(\mathbf{K}_1) & (\text{ pois } H^2 = H)
\end{array}
$$

Logo $(HP)^2 = HP$.

(iii) Se $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2$, então $P(\mathbf{K}_1) \subseteq P(\mathbf{K}_2)$, donde $HP(\mathbf{K}_1) \subseteq HP(\mathbf{K}_2)$.

Do provado em (i), (ii) e (iii) conclui-se que HP é um operador de fecho.

Cotação: 1.(1.5+1.25+1.25); 2.(1.75); 3.(2.0+2.0+1.5); 4.(2.0+2.0+1.5); 5.(1.5+1.75)