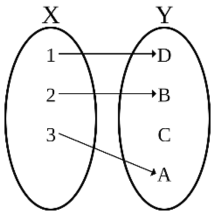
Seja $\boldsymbol{f}$ uma função de domínio **X** e contradomínio **Y**, $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$.

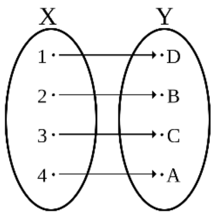
A função $\boldsymbol{f}$ diz-se **injetiva** se p/ cada elemento $x \in X$, existe um <u>único</u> $y \in Y$ tq $f(x) = y$.
Ou seja: $\forall a, b \in X,\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

A função $\boldsymbol{f}$ diz-se **sobrejetiva** se p/ cada elemento $y \in Y$, existe <u>pelo menos</u> um $x \in X$ tq $f(x) = y$.
Ou seja: $\forall y \in Y, \exists x \in X,\ f(x) = y$.

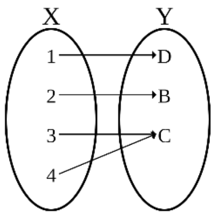
A função $\boldsymbol{f}$ diz-se **bijetiva** se for injetiva e sobrejetiva.



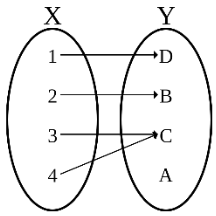
Função injectiva mas não sobrejectiva.



Função injectiva e sobrejectiva.



Função sobrejectiva mas não injectiva.



Função não sobrejectiva e não injectiva.

Nota	
p/	= para
qq	= qualquer
tq	= tal que
tb	= também
ex.	= exemplo
i.e.	= isto é
sse	= se e só se ($\Leftrightarrow$)
então	($\Rightarrow$)

Dados um subconjunto A de P e $m \in P$, diz-se que m é:

- **majorante** de A se, p/ todo $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a} \leq \mathbf{m}$;
- **minorante** de A se, p/ todo $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{m} \leq \mathbf{a}$;
- **maximal** de A se $\mathbf{m} \in \mathbf{A}$ e $\neg(\exists a \in A,\ m < a)$;
- **minimal** de A se $\mathbf{m} \in \mathbf{A}$ e $\neg(\exists a \in A,\ a < m)$;
- **máximo** de A se m é um <u>majorante</u> de A e $\mathrm{m} \in \mathrm{A}$;
- **mínimo** de A se m é um <u>minorante</u> de A e $\mathrm{m} \in \mathrm{A}$;
- **supremo** de A *(ou $\vee \mathbf{A}$)* se m é um <u>majorante</u> de A e $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{m}'$, p/ qq <u>majorante</u> *m'* de A;
- **ínfimo** de A *(ou $\wedge \boldsymbol{A}$)* se m é um <u>minorante</u> de A e $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{m}'$, p/ qq <u>minorante</u> *m'* de A;

Leis Comutativas	>	$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{a}$
Leis Associativas	>	$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a} \vee (\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \vee \boldsymbol{c}$
Leis de Idempotência	>	$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
Leis de Absorção	>	$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} \vee (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$

Princípio da Boa Organização
Todo subconjunto não-vazio formado por $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}_{0^+}$) possuí um menor elemento.

Reticulados podem ser definidos de duas formas <u>equivalentes</u>:
- **Conjunto Parcialmente Ordenado (c.p.o.)**
- **Estruturas Algébricas**

Princípio da Dualidade de Reticulados
Uma afirmação é verdadeira em qq reticulado, sse o mesmo acontece com a respectiva afirmação dual.

Num **c.p.o.** (P; $\leq$) são <u>equivalentes as seguintes afirmações</u>, p/ qq $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{P}$:

I) $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$
II) $\mathbf{sup}\ \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} = \boldsymbol{b}$
III) $\mathbf{inf}\ \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} = \boldsymbol{a}$

Ou seja, um Reticulado é um c.p.o. tq p/ cada dois elementos ***a,b*** existe **supremo** e **ínfimo** de **{a,b}**.

Um c.p.o. $(P; \leq)$ tq P tem elemento máximo e elemento mínimo diz-se um **Conjunto Parcialmente Ordenado Limitado.**

Dados um Reticulado e um Subconjunto não vazio $\boldsymbol{R}'$ de $\boldsymbol{R}$, um c.p.o $(\boldsymbol{R}'; \leq')$ diz-se **Subreticulado** de $(\boldsymbol{R}; \leq)$ se $\leq' = \leq_{|\boldsymbol{R}'}$ e $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}'$ o Supremo e Ínfimo de **{a,b}** (determinados em $(\boldsymbol{R}; \leq)$) pertencem a $\boldsymbol{R}'$.

Sejam $(\boldsymbol{P_1}; \leq)$ e $(\boldsymbol{P_2}; \leq)$ dois c.p.o. e $\boldsymbol{\alpha}: \boldsymbol{P_1} \to \boldsymbol{P_2}$ uma **aplicação**, que se designa:

- **Isótona**, ou <u>preserva a ordem</u>, se p/ qq $a, b \in P_1$, $\boldsymbol{a} \leq_1 \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}) \leq_2 \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{b})$
- **Antítona**, se p/ qq $a, b \in P_1$, $\boldsymbol{a} \leq_1 \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}) \geq_2 \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{b})$
- **Mergulho de Ordem** se p/ qq $a, b \in P_1$, $\boldsymbol{a} \leq_1 \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}) \leq_2 \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{b})$
- **Isomorfismo de c.p.o.'s** se α é um mergulho de ordem e uma aplicação sobrejetiva

Um Reticulado pode ser definido como **Estrutura Algébrica**, consistindo de um conjunto e duas operações, por ex. $(\boldsymbol{R}; \wedge, \vee)$, se $\forall x, y, z \in R$ se verifiquem as Leis Comutativas, Associativas, Idempotência e Absorção.

Se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ é um Reticulado, então a relação $\leq$ definida em R por: $x \leq y$ se $x = x \wedge y$, é uma relação de ordem parcial tq p/ qq $x, y \in R$, existem $Inf\{x, y\}$ e $Sup\{x, y\}$ e tem-se $Inf\{x, y\} = x \wedge y$ e $Sup\{x, y\} = x \vee y$.

Se $(R; \leq)$ é um c.p.o. tq p/ qq $x, y \in R$, existem $Inf\{x, y\}$ e $Sup\{x, y\}$, então $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ onde $x \wedge y = Inf\{x, y\}$ e $x \vee y = Sup\{x, y\}$ é um Reticulado e p/ qq $x, y \in R$, $x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y \Leftrightarrow y = x \vee y$.

Sejam $\mathcal{R} = (\boldsymbol{R}; \wedge', \vee')$ um Reticulado, $\boldsymbol{R}'$ um Subconjunto não vazio de $\boldsymbol{R}$ e $\wedge'$ e $\vee'$ operações binárias em $\boldsymbol{R}$.

Diz-se que $\mathcal{R}' = (\boldsymbol{R}'; \wedge', \vee')$ é um **Subreticulado** de $\mathcal{R}$ se $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{a} \wedge' \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}'$ e $\boldsymbol{a} \vee' \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}'$ e adicionalmente $\boldsymbol{a} \wedge' \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{a} \vee' \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$.

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1;\ \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$, $\mathcal{R}_2 = (R_2;\ \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ e $\vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ as operações binárias de $R_1 \times R_2$, definidas por:

$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1} \wedge_{\mathcal{R}_1} \boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{a_2} \wedge_{\mathcal{R}_2} \boldsymbol{b_2})$$
$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1} \vee_{\mathcal{R}_1} \boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{a_2} \vee_{\mathcal{R}_2} \boldsymbol{b_2})$$

Assim $(\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2}; \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2})$ é designado **reticulado produto** de R_1 e R_2, representado por $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$.

Sejam $(R_1, \wedge_{R_1}, \vee_{R_1})$ e $(R_2, \wedge_{R_2}, \vee_{R_2})$ Reticulado, $\leq_1$ e $\leq_2$ as relações de ordem associadas, e seja $\leq$ a relação de ordem definida em $R_1 \times R_2$ por: $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \leq (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2})$ ***sse*** $\boldsymbol{a_1} \leq \boldsymbol{b_1}$ ***e*** $\boldsymbol{a_2} \leq \boldsymbol{b_2}$

Então $(\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2};\ \leq)$ é um Reticulado. Ademais:

$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \wedge_{\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2}} (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \Leftrightarrow \boldsymbol{a_1} \wedge_{\boldsymbol{R_1}} \boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{a_1} \text{ e } \boldsymbol{a_2} \wedge_{\boldsymbol{R_2}} \boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{a_2} \Leftrightarrow \boldsymbol{a_1} \leq_1 \boldsymbol{b_1} \text{ e } \boldsymbol{a_2} \leq_2 \boldsymbol{b_2} \Leftrightarrow (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}) \leq (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2})$$

Por conseguinte o Reticulado $(\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2}; \wedge_{\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2}}, \vee_{\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2}})$ coincide com o Reticulado $(\boldsymbol{R_1} \times \boldsymbol{R_2};\ \leq)$.

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1;\ \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2;\ \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\alpha = R_1 \rightarrow R_2$ uma aplicação. Esta designa-se de:

- **Homomorfismo** de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ se $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a} \wedge_{\mathcal{R}_1} \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}) \wedge_{\mathcal{R}_2} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b})$ e $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a} \vee_{\mathcal{R}_1} \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}) \vee_{\mathcal{R}_2} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b})$;
- **Isomorfismo** de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ se α é *bijetiva* e é um *homomorfismo*.

Caso exista um isomorfismo de reticulados de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$, o reticulado $\mathcal{R}_1$ diz-se isomorfo ao reticulado $\mathcal{R}_2$.

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1;\ \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2;\ \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\leq_1$ e $\leq_1$ as relações de ordem definidas, respectivamente, em R_1 e R_2 por: $a \leq_1 b$ sse $a = a \wedge_{\mathcal{R}_1} b$, $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R_1}$; $a \leq_2 b$ sse $a = a \wedge_{\mathcal{R}_2} b$, $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R_2}$.

Então os reticulados $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são isomorfos sse os c.p.o.s. $(\boldsymbol{R_1}; \leq_1)$ e $(\boldsymbol{R_2}; \leq_2)$ são isomorfos.

Um reticulado $(R; \leq)$ diz-se **Completo** se p/ qq subconjunto de R exista $\wedge \boldsymbol{S}$ e/ou $\vee \boldsymbol{S}$.

Todo o Reticulado Finito é Completo.

Um Subreticulado $(R'; \leq_{|\boldsymbol{R}'})$ de $(R; \leq)$ diz-se um **Subreticulado Completo** se p/ qq subconjunto S de R', $\wedge S$ e $\vee S$, como definidos em $(R; \leq)$, pertencem a R'.

Seja $(R; \leq)$ um Reticulado, um elemento $a \in R$ diz-se **Compacto** se sempre que existe $\vee a$ e $a \leq \vee a$ p/ algum $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{R}$, então $a \leq \vee B$ p/ algum conjunto finito $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$.

Um Reticulado diz-se **Compactamente Gerado** se, p/ todo $a \in R$, $a = \vee S$, p/ algum subconjunto S de R formado por elementos compactos de R.

Um Reticulado diz-se **Reticulado Algébrico** se é um Reticulado Completo e Compactamente gerado.

Todos elementos de um Reticulado Finito são compactos.

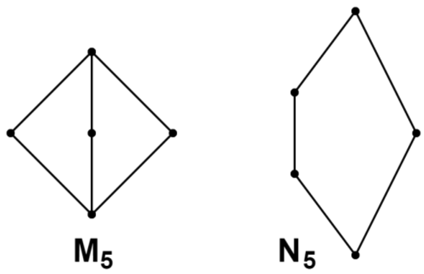
Um Reticulado $\mathcal{R} = (\boldsymbol{R}; \wedge, \vee)$ diz-se **Distributivo** se satisfaz uma das seguintes condições:

- $\boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \vee (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{z}),\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}$
- $\boldsymbol{x} \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{z}),\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}$

Estas condições, designadas **leis distributivas**, são equivalentes.

Sendo $\mathcal{R}$ um reticulado, $\mathcal{R}$ satisfaz uma condição sse satisfizer a outra.

$\mathcal{R}$ é Distributivo sse não tem qq Subreticulado isomorfo a M_5 ou a N_5.



Um Reticulado $\mathcal{R} = (\boldsymbol{R}; \wedge, \vee)$ diz-se **Modular** se p/ qq $x, y, z \in R$:

$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{x} \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y} \wedge (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{z})$ **OU** $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{y} \wedge (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z})$

A condição da definição anterior, designada **lei modular**, é equivalente a: $(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \vee (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y} \wedge ((\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \vee \boldsymbol{z}))$

Todo o Reticulado Distributivo é um Reticulado Modular (contrário não se verifica).

$\mathcal{R}$ é um Reticulado Modular sse não tem qq Subreticulado isomorfo a N_5.

Dá-se a designação de **tipo algébrico**, a um par (O, τ). Onde:
- O é um conjunto e τ é uma função de O em $\mathbb{N}_0$;
- cada elemento f de O é designado por **símbolo de operação** e $\tau(f)$ diz-se a sua **aridade**;
- o conjunto de todos os símbolos de O de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, é representado por O_n.

Chama-se **álgebra** a um par $\mathcal{A} = (A; F)$ onde A é um conjunto não-vazio e F é uma família $(f^{\mathcal{A}})_{f \in O}$ de operações finitárias em A indexada por um conjunto O.
Ao conjunto A dá-se a designação de **universo** ou **conjunto de suporte $\mathcal{A}$**, cada operação $f^{\mathcal{A}}$ é designada por **operação fundamental de $\mathcal{A}$** e ao conjunto O dá-se a designação de **conjunto de símbolos operacionais de $\mathcal{A}$**.

Uma álgebra $\mathcal{A}$ diz-se uma **álgebra de tipo** (O, τ) se O é o conjunto de símbolos operacionais de $\mathcal{A}$ e τ é a função de O em $\mathbb{N}_0$ que a cada símbolo operacional $f \in O$ associa a aridade n_f da operação básica $f^{\mathcal{A}}$.

Uma álgebra diz-se **trivial** se $|A| = 1$ e diz-se finita/infinita caso o seu universo seje finito/infinito.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras de tipos (O_1, τ_1) e (O_2, τ_2), respectivamente. Diz-se que a álgebra $\mathcal{B}$ é um **reduto** da álgebra $\mathcal{A}$ se: $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ têm o mesmo universo, $O_1 \subseteq O_2$ e, para todo $f \in O_2$, $\tau_1(f) = \tau_2(f)$ e $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{B}}$.

Um **semigrupo** é um grupóide $\mathcal{S} = (S; \cdot)$ tq p/ qq $x, y, z \in S$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Um **grupo** é uma álgebra $\mathcal{G} = (G; \cdot)$ tq p/ cada $x \in G$, existe $x^{-1} \in G$ que satisfaz: $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$

Um **grupo abeliano** é um grupo $\mathcal{G} = (G; \cdot, ^{-1}, 1)$ tq p/ qq $x, y \in G$, $x \cdot y = y \cdot x$.

Um **anel** é uma álgebra $\mathcal{A} = (A; +, \cdot, -, 0)$ de (2,2,1,0) tq $(A; +, -, 0)$ é um grupo abeliano, $(A; \cdot)$ é um semigrupo e p/ qq $x, y, z \in G$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ e $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Um **reticulado** é uma álgebra $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ de tipo (2,2) tq p/ qq <u>$x, y, z \in R$ se verifiquem as Leis Comutativas, Associativas, Idempotência e Absorção.</u>

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra. Um subconjunto B de A diz-se um **subuniverso** de $\mathcal{A}$ se B é fechado para toda a operação de F. Representa-se por $\boldsymbol{Sub\,\mathcal{A}}$ o conjunto de todos subuniversos de $\mathcal{A}$.

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra, $X \subseteq A$ e $S = \bigcap \{B \mid B \text{ é } subuniverso\ de\ A\ e\ X \subseteq B\}$
Então S é um subuniverso de $\mathcal{A}$ e é o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém X.

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra, $X \subseteq A$ e S um subuniverso de $\mathcal{A}$. Designa-se por **subuniverso de $\mathcal{A}$ gerado por $\boldsymbol{X}$**, e representa-se por $Sg^{\mathcal{A}}(X)$, o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém X, i.e., o conjunto:

$Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcap \{B \mid B \text{ é } subuniverso\ de\ A\ e\ X \subseteq B\}$

Diz-se que S é **finitamente gerado** se $S = Sg^{\mathcal{A}}(X)$, para algum conjunto finito $X \subseteq A$.

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X \subseteq A$. Para $i \in \mathbb{N}_0$, define-se:

$X_0 = X$

$X_{i+1} = X_i \cup \{f(x) \mid f \text{ é operação } n-\text{ária em } \mathcal{A} \text{ e } x \in (X_i)^n, n \in \mathbb{N}_0\}$

Então $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$.

Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra, $X \subseteq A$ e $a \in Sg^{\mathcal{A}}(X)$. Então $a \in Sg^{\mathcal{A}}(Y)$, para algum subconjunto finito Y de X.

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X, Y \subseteq A$. Então:

I) $X \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$

II) $X \subseteq Y \Rightarrow Sg^{\mathcal{A}}(X) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y)$

III) $Sg^{\mathcal{A}}(Sg^{\mathcal{A}}(X)) = Sg^{\mathcal{A}}(X)$

IV) $Sg^{\mathcal{A}}(X) = S\,\{Sg^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}$

Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $Sub\mathcal{A}$ o conjunto de subuniversos de $\mathcal{A}$. O reticulado $(Sub\mathcal{A}, \subseteq)$ designa-se por **reticulado dos subuniveros de $\mathcal{A}$** e representa-se por $\boldsymbol{Sub\mathcal{A}}$.

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo (O, τ).
Diz-se que $\mathcal{B}$ é uma **subálgebra** de $\mathcal{A}$, e escreve-se $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, se:

1) B é um subuniverso de $\mathcal{A}$
2) p/ todo símbolo de operação $f \in O_n$, $f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n) = f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)$, p/ qq $(b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{B}^n$.

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X \subseteq A$ tq $X \neq \emptyset$. Chama-se **subálgebra de $\mathcal{A}$ gerada por X** e representa-se por $Sg^{\mathcal{A}}(X)$ a subálgebra de $\mathcal{A}$ cujo universo é $Sg^{\mathcal{A}}(X)$.

Sejam A um conjunto e θ uma relação relação binária em A, diz-se que θ é uma **Relação de Equivalência** em A se são satisfeitas as seguintes condições:

I) **Simetria:** p/ qq $a, b \in A$, $\boldsymbol{a\theta b \Rightarrow b\theta a}$ ou $\boldsymbol{(a,b) \in \theta \Rightarrow (b,a) \in \theta}$

II) **Reflexividade:** p/ todo $a \in A$, $\boldsymbol{a\theta a}$ ou $\boldsymbol{(a,a) \in \theta}$

III) **Transitividade:** p/ qq $a, b, c \in A$, $\boldsymbol{a\theta b}$ e $\boldsymbol{b\theta c} \Rightarrow \boldsymbol{a\theta c}$ ou $\boldsymbol{(a,b) \in \theta}$ e $\boldsymbol{(b,c) \in \theta \Rightarrow (a,c) \in \theta}$

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ) e $\boldsymbol{\theta}$ uma relação de equivalência em A.
Diz-se que θ é uma **Congruência** em $\mathcal{A}$ se θ satisfaz a **propriedade de substituição**:

$\forall\, n \in \mathbb{N}_0, f \in O_n$ e $(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) \in A^n$, $(a_i\, \theta\, b_i, \forall_i \in \{1, \dots, n\} \Longrightarrow f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)\, \theta\, f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n)$.

Sejam $\mathcal{A}$ álgebra, ao reticulado $Con\mathcal{A} = (Con\mathcal{A}, \subseteq)$ dá-se a designação de **reticulado das congruências de $\mathcal{A}$.**

Uma **Congruência** numa álgebra é uma **Relação de Equivalência** que é compatível com as operações da álgebra.

Dado um elemento $x \in A$, chama-se **Classe de Equivalência de x Módulo θ** ao conjunto:

$$[x]_\theta = \{y \in A \mid\ x\, \theta\, y\}$$

O conjunto de todas as relações de equivalência definidas em A representa-se por **Eq(A).**

Para $\mathcal{A} = (A; F)$, θ é uma **congruência** em $\mathcal{A}$ se θ satisfaz a propriedade de substituição, i.e.:

$$\boldsymbol{a_i\, \theta\, b_i \Rightarrow f^A(a_1, \dots, a_n)\, \theta\, f^B(b_1, \dots, b_n)} \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{(x,y) \in \theta \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \theta}$$

ou seja

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{(a_1, b_1) \in \theta} \\ \boldsymbol{(a_2, b_2) \in \theta} \end{array}\right| \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \boldsymbol{(a_1 \wedge a_2\,,\ b_1 \wedge b_2) \in \theta} \\ \boldsymbol{(a_1 \vee a_2\,,\ b_1 \vee b_2) \in \theta} \end{array}\right.$$

O conjunto de todas congruências da álgebra $\mathcal{A}$ é denotado por $\boldsymbol{Con\mathcal{A}}$.
E ao reticulado $Con\mathcal{A} = (Con\mathcal{A}, \subseteq)$ dá-se a designação de **reticulado de congruências de $\mathcal{A}$.**

Se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ é um reticulado, então $\theta \in Eq(R)$ é uma congruência em $\mathcal{R}$ sse:

I) cada classe de θ é um subreticulado

II) cada classe de θ é um **subconjunto convexo** de R

(i.e., $a\,\theta\,b$ *e* $a \leq c \leq b \Rightarrow a\,\theta\,c$*)*

III) as classes de equivalência de θ são fechadas para os quadriláteros

(i.e. sempre que a, b, c, d *são elementos de* R *distintos e tais que* $a < b,\ c < d$ *e* $(a \vee d = b$ *e* $a \wedge d = c)$ *ou* $(b \vee c = d$ *e* $b \wedge c = a)$*, então* $a\,\theta\,b$ *sse* $c\,\theta\,d$*).*