Álgebra Universal e Categorias

Carla Mendes

2019/2020

Departamento de Matemática

Reticulados

Reticulados

Os reticulados podem ser definidos de duas formas equivalentes: como conjuntos parcialmente ordenados e como estruturas algébricas.

No sentido de se definir reticulados enquanto conjuntos parcialmente ordenados, relembram-se algumas noções básicas relacionadas com o conceito de ordem parcial.

Relações de ordem

Definição

*Sejam A e B dois conjuntos. Chamamos **relação binária de** A **em** B a qualquer subconjunto ρ do produto cartesiano $A \times B$. Quando $A = B$, dizemos que ρ é uma **relação binária em** A.*

*Se $(a, b) \in \rho$, então dizemos que a **está relacionado com** b **por** ρ e escrevemos $a \, \rho \, b$. Se $(a, b) \notin \rho$, escrevemos $a \not\rho \, b$ e dizemos que a **não está relacionado com** b **por** ρ.*

Uma vez que as relações binárias são conjuntos, faz sentido aplicar a estas relações as operações de união, interseção e complementação.

Além destas operações, existem outros processos que permitem a construção de novas relações binárias a partir de relações binárias dadas.

Definição

Sejam A, B conjuntos e ρ uma relação binária de A em B. Chama-se ***relação inversa de*** *ρ, e representa-se por ρ^{-1}, a relação de B em A definida por*

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \rho\}.$$

Definição

*Sejam A, B, C, D conjuntos, ρ uma relação binária de A em B e ϱ uma relação binária de C em D. Chama-se **relação composta de ϱ com** ρ, e representa-se por $\varrho \circ \rho$, a relação binária de A em D definida por*

$$\varrho \circ \rho = \{(x, y) \in A \times D \mid \exists_{z \in B \cap C} \ \ ((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \varrho)\}.$$

Definição

*Sejam P um conjunto e ρ uma relação binária em P. Diz-se que ρ é uma relação de **ordem parcial** em P se são satisfeitas as seguintes condições:*

(i) *para todo $a \in P$, $(a, a) \in \rho$.*

(ii) *para quaisquer $a, b \in P$, $(a, b) \in \rho$ e $(b, a) \in \rho \Rightarrow a = b$.*

(iii) *para quaisquer $a, b, c \in P$, $(a, b) \in \rho$ e $(b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$.*

Se adicionalmente, para quaisquer $a, b \in P$,

(iv) *$(a, b) \in \rho$ ou $(b, a) \in \rho$,*

*a relação ρ diz-se uma relação de **ordem total**. Se P é um conjunto não vazio e ρ é uma relação de ordem parcial em P, ao par (P, ρ) dá-se a designação de **conjunto parcialmente ordenado** (c.p.o.); se ρ é uma relação de ordem total em P, o par (P, ρ) designa-se por **conjunto totalmente ordenado** ou por **cadeia**.*

Exemplo

1) Sendo A um dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ e $\leq$ a relação "menor ou igual" usual em A, o par $(A, \leq)$ é um c.p.o..

2) Sendo $|$ a relação divide em $\mathbb{N}$, $(\mathbb{N}, |)$ é um c.p.o..

3) Dado um conjunto A, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um c.p.o..

4) Os c.p.o.s $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ e $(\mathbb{R}, \leq)$ são cadeias.

Reticulados

Em geral, representamos uma ordem parcial definida num conjunto P por $\leq$ e o respetivo c.p.o. por $(P, \leq)$.

Dado um c.p.o. $(P, \leq)$ e dados elementos $a, b \in P$, escrevemos:

- $a \leq b$, e lemos "a ***é menor ou igual a*** b", para representar $(a, b) \in \leq$;
- $a \not\leq b$, e lemos "a ***não é menor ou igual a*** b", para representar $(a, b) \notin \leq$;
- $a < b$, e lemos "a ***é menor do que*** b", se $a \leq b$ e $a \neq b$;
- $a \prec b$, e lemos "b ***é sucessor de*** a" (ou b ***cobre*** a ou a ***é coberto por*** b), se $a < b$ e $\neg(\exists\, c \in P, a \leq c \leq b)$.

Reticulados

Dados $a, b \in P$, diz-se que a e b são ***comparáveis*** se $a \leq b$ ou $b \leq a$; caso contrário, ou seja, se $a \nleq b$ e $b \nleq a$, diz-se que a e b são ***incomparáveis*** e escreve-se $a \parallel b$.

Um subconjunto A de P diz-se:

- uma ***cadeia em*** $(P, \leq)$ ou um ***conjunto totalmente ordenado em*** $(P, \leq)$ se, para quaisquer $a, b \in A$, a e b são comparáveis;
- uma ***anticadeia em*** $(P, \leq)$ se, para quaisquer $a, b \in A$ tais que $a \neq b$, $a \parallel b$.

Reticulados

O ***intervalo fechado*** $[a, b]$ representa o conjunto

$$\{c \in P \,|\, a \leq c \leq b\}$$

e o ***intervalo aberto*** (a, b) representa o conjunto

$$\{c \in P \,|\, a < c < b\}.$$

Os intervalos $(a, b]$ e $[a, b)$ representam, respetivamente, os conjuntos

$$\{c \in P \,|\, a < c \leq b\} \text{ e } \{c \in P \,|\, a \leq c < b\}.$$

Dado um subconjunto A de P, diz-se que A é um ***subconjunto convexo de*** P se, para quaisquer $a, b \in A$ e $c \in P$,

$$a \leq c \leq b \Rightarrow c \in A.$$

Claramente, para quaisquer $a, b \in P$, o intervalo $[a, b]$ é um subconjunto convexo de P.

Reticulados

Dados um c.p.o. $(P, \leq)$ e A um suconjunto de P, podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a A.

Dados um subconjunto A de P e $m \in P$, diz-se que m é:

- um ***maximal*** de A se $m \in A$ e $\neg(\exists\, a \in A, m < a)$;
- um ***minimal*** de A se $m \in A$ e $\neg(\exists\, a \in A, a < m)$;
- um ***majorante*** de A se, para todo $a \in A$, $a \leq m$;
- um ***minorante*** de A se, para todo $a \in A$, $m \leq a$;
- um ***supremo*** de A se m é um majorante de A e $m \leq m'$, para qualquer majorante m' de A;
- um ***ínfimo*** de A se m é um minorante de A e $m' \leq m$, para qualquer minorante m' de A;
- um ***máximo*** de A se m é um majorante de A e $m \in A$;
- um ***mínimo*** de A se m é um minorante de A e $m \in A$.

Reticulados

O conjunto dos majorantes de A e o conjunto dos minorantes de A são representados por $\mathrm{Maj}(A)$ e $\mathrm{Min}(A)$, respetivamente.

Caso exista, o supremo (ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto A de P é único e representa-se por $\sup A$ ou $\bigvee A$ (respetivamente, $\inf A$ ou $\bigwedge A$, $\max A$, $\min A$).

Se $A = \{a, b\}$ é usual escrever $a \vee b$ e $a \wedge b$ para representar $\bigvee A$ e $\bigwedge A$, respetivamente.

Caso exista, o elemento máximo (mínimo) de P é usualmente representado por 1 (respetivamente, 0).

Um c.p.o. $(P, \leq)$ tal que P tem elemento máximo e elemento mínimo diz-se um ***conjunto parcialmente ordenado limitado***.

Proposição

Num c.p.o. $(P, \leq)$ são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer $a, b \in P$:

(i) $a \leq b$;

(ii) $\sup\{a, b\} = b$;

(iii) $\inf\{a, b\} = a$.

Teorema

Seja $(P, \leq)$ *um conjunto parcialmente ordenado e sejam* a, b, c, d *elementos de* P *tais que* $a \leq b$ *e* $c \leq d$*. Então:*

(1) *Se existem* $\inf\{a, c\}$ *e* $\inf\{b, d\}$*, então* $\inf\{a, c\} \leq \inf\{b, d\}$*.*

(2) *Se existem* $\sup\{a, c\}$ *e* $\sup\{b, d\}$*, então* $\sup\{a, c\} \leq \sup\{b, d\}$*.*

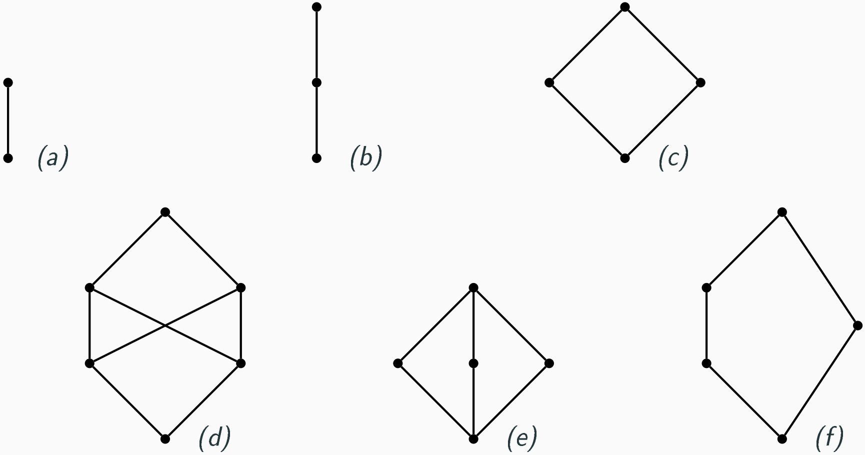
Diagramas de Hasse

Os conjuntos parcialmente ordenados finitos podem ser representados por meio de diagramas, designados por ***diagramas de Hasse***.

Dado um conjunto parcialmente ordenado finito P, cada elemento de P é representado por um ponto do plano. Se a e b são elementos de P tais que $a \prec b$, o ponto associado ao elemento b é representado acima do ponto associado ao elemento a e unem-se os dois pontos por meio de um segmento de reta.

Reticulados

Exemplo



Construção de conjuntos parcialmente ordenados

Dado um c.p.o. $(P, \leq)$, definem-se a partir da relação $\leq$ outras relações de ordem parcial.

Se $(P, \leq)$ é um c.p.o. e A é um suconjunto não vazio de P, a relação $\leq_{|A}$ definida, para quaisquer $a, b \in A$, por

$$a \leq_{|A} b \text{ se e só se } a \leq b$$

é uma relação de ordem parcial em A. A relação $\leq_{|A}$ designa-se por ***ordem parcial induzida por*** $\leq$ em A.

Sendo $(P, \leq)$ um c.p.o., define-se a partir da relação $\leq$ uma outra relação de ordem parcial em P. A relação $\leq_d$ definida em P por

$$a \leq_d b \text{ se e só se } b \leq a$$

é também uma relação de ordem parcial em P. A relação $\leq_d$ designa-se por ***relação de ordem dual de*** $\leq$ e o c.p.o. $(P, \leq_d)$ designa-se por ***c.p.o. dual de*** $(P, \leq)$.

É simples perceber que $(\leq_d)_d = \leq$ e que o c.p.o. dual de $(P, \leq_d)$ é $(P, \leq)$. Os c.p.o.s $(P, \leq)$ e $(P, \leq_d)$ dizem-se ***c.p.o.s duais***.

Se Φ é uma afirmação sobre conjuntos parcialmente ordenados, a afirmação Φ_d, obtida de Φ substituindo toda a ocorrência de $\leq$ por $\leq_d$, designa-se por ***afirmação dual de*** Φ. Note-se que se Φ é uma afirmação verdadeira em $(P, \leq)$, então Φ_d é verdadeira em $(P, \leq_d)$, pelo que é válido o seguinte princípio.

Princípio de dualidade para c.p.o.s Uma afirmação é verdadeira em qualquer c.p.o. sse o mesmo acontece com a respetiva afirmação dual.

Reticulados

Observe-se que os conceitos de majorante, supremo, elemento máximo, elemento maximal são, respetivamente, duais dos conceitos de minorante, ínfimo, elemento mínimo, elemento minimal.

Se Φ é uma afirmação sobre c.p.o.s envolvendo algum destes conceitos, a afirmação Φ_d é obtida substituíndo cada um destes conceitos pelo conceito dual e substituíndo toda a ocorrência de $\leq$ por $\leq_d$.

Dados dois conjuntos parcialmente ordenados $(P, \leq_1)$ e $(Q, \leq_2)$, existem diferentes processos para construir novos c.p.o.s a partir dos c.p.o.s dados.

Por exemplo, a relação binária $\leq$ definida em $P \times Q$ por

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \text{ se e só se } a_1 \leq_1 b_1 \ e \ a_2 \leq_2 b_2$$

é uma relação de ordem parcial e, por conseguinte, $(P \times Q, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, designado por ***produto de*** $(P, \leq_1)$ e $(Q, \leq_2)$ e representado por $P \times Q$.

Reticulados

A construção anterior pode ser generalizada a um número finito de conjuntos parcialmente ordenados: se $(P_1, \leq_1)$, ..., $(P_n, \leq_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, são conjuntos parcialmente ordenados, então $(P_1 \times \cdots \times P_n, \leq)$, onde $\leq$ é a relação definida em $P_1 \times \cdots \times P_n$ por

$$(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n) \text{ se e só se } a_1 \leq_1 b_1, \ldots, a_n \leq_n b_n,$$

é um conjunto parcialmente ordenado.

Se $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = P$ e $\leq_1 = \leq_2 = \ldots = \leq_n$, representa-se o c.p.o. $(P_1 \times \cdots \times P_n, \leq)$ por P^n.

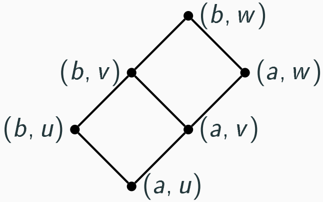
Reticulados

Exemplo

Considerando as cadeias $\mathbf{2}$ *e* $\mathbf{3}$ *a seguir representadas*

$\mathbf{2}$ $\qquad$ $\mathbf{3}$

o c.p.o. $(\mathbf{2} \times \mathbf{3}, \leq)$ *pode ser representado pelo diagrama seguinte*



$\mathbf{2} \times \mathbf{3}$

Aplicações entre conjuntos parcialmente ordenados

No estudo de aplicações entre conjuntos parcialmente ordenados têm particular interesse aquelas que preservam a ordem.

Definição

Sejam $(P_1, \leq_1)$ *e* $(P_2, \leq_2)$ *dois conjuntos parcialmente ordenados e* $\alpha : P_1 \to P_2$ *uma aplicação. Diz-se que:*

- *a aplicação* α ***preserva a ordem*** *ou que* α *é* ***isótona*** *se, para quaisquer* $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- *a aplicação* α *é* ***antítona*** *se, para quaisquer* $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(b) \leq_2 \alpha(a).$$

Definição

- α *é um* ***mergulho de ordem*** *se, para quaisquer* $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α *é um* ***isomorfismo de c.p.o.s*** *se* α *é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.*

Caso exista um isomorfismo de c.p.o.s de $(P_1, \leq_1)$ *em* $(P_2, \leq_2)$, *diz-se que o c.p.o.* $(P_1, \leq_1)$ *é isomorfo ao c.p.o.* $(P_2, \leq_2)$.

Reticulados

Um isomorfismo de c.p.o.s é uma aplicação bijetiva.

Se α é um isomorfismo de um c.p.o. $(P_1, \leq_1)$ num c.p.o. $(P_2, \leq_2)$, então $\alpha^{-1} : P_2 \to P_1$ também é um isomorfismo de $(P_2, \leq_2)$ em $(P_1, \leq_1)$.

Caso exista um isomorfismo entre os c.p.o.s $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ diz-se que os c.p.o.s são ***isomorfos*** e escreve-se $(P_1, \leq_1) \cong (P_2, \leq_2)$.

Note-se que, embora um isomorfismo de c.p.o.s seja uma aplicação isótona e bijetiva, uma aplicação bijetiva e isótona não é necessariamente um isomorfismo de c.p.o.s.

Por exemplo, sendo $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ os c.p.o.s com os diagramas de Hasse a seguir apresentados

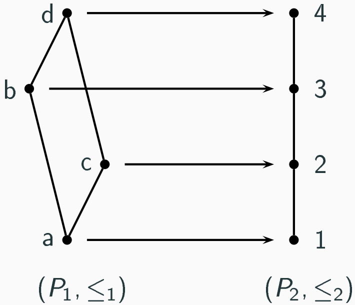


Figura 1

a aplicação α definida de P_1 em P_2 por $\alpha(a) = 1$, $\alpha(b) = 3$, $\alpha(c) = 2$ e $\alpha(d) = 4$, é isótona e bijetiva, mas não é um isomorfismo de c.p.o.s.

Definição

Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Uma aplicação $f : P \to P$ diz-se um ***operador de fecho em*** *$(P, \leq)$ se, para quaisquer $x, y \in P$, são satisfeitas as seguintes condições:*

F1: $x \leq f(x)$;

F2: $f^2(x) \leq f(x)$;

F3: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Dado um operador de fecho $f : P \to P$ e dado $p \in P$, designa-se o elemento $f(p)$ por ***fecho de*** *p. O elemento p diz-se* ***fechado para*** *f se $p = f(p)$. O conjunto dos elementos de P fechados para f é representado por $Fc_f(P)$.*

Reticulados

Dado um conjunto A, já observámos anteriormente que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Um operador de fecho f em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é usualmente designado por ***operador de fecho em*** A.

Dados um subconjunto X de A que seja fechado para f e um subconjunto Y de A, diz-se que Y é um ***conjunto gerador de*** X se $f(Y) = X$; caso exista um conjunto gerador de X que seja finito, o conjunto X diz-se ***finitamente gerado***.

Um operador de fecho f em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ diz-se um ***operador de fecho algébrico*** se, para qualquer $X \subseteq A$,

F4: $f(X) = \bigcup\{f(Y) : Y \subseteq X \text{ e } Y \text{ é finito }\}$.

Reticulados

Muitas das propriedades de um conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ são expressas atendendo à existência de supremo e ínfimo de certos subconjuntos de P. Uma classe de conjuntos parcialmente ordenados expressos deste modo é a classe dos reticulados.

Duas definições de reticulados

Os reticulados podem ser definidos de duas formas equivalentes: como conjuntos parcialmente ordenados e como estruturas algébricas. Nesta secção apresentamos estas definições e verificamos a equivalência das duas.

Definição

Um conjunto parcialmente ordenado $(R, \leq)$ *diz-se um* ***reticulado*** *se, para quaisquer* $a, b \in R$, *existem* $\inf\{a, b\}$ *e* $\sup\{a, b\}$.

Exemplo

1) Todas as cadeias são reticulados.

2) Dado um conjunto A, o c.p.o. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado, tendo-se, para quaisquer $X, Y \subseteq A$,

$$\inf\{X, Y\} = X \cap Y \text{ e } \sup\{X, Y\} = X \cup Y.$$

Exemplo

3) Sendo $\mathrm{Subg}(G)$ *o conjunto dos subgrupos de um grupo* G *e* $\subseteq$ *a relação de inclusão usual, o par* $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$ *é um reticulado, tendo-se, para quaisquer* $G_1, G_2 \in \mathrm{Subg}(G)$,

$$\inf\{G_1, G_2\} = G_1 \cap G_2 \text{ e } \sup\{G_1, G_2\} = < G_1 \cup G_2 > .$$

Se $(R, \leq)$ é um reticulado, então o seu c.p.o. dual $(R, \leq_d)$ é também um reticulado. Sendo assim, é válido o princípio seguinte.

Princípio de Dualidade para Reticulados Uma afirmação é verdadeira em qualquer reticulado se e só se o mesmo acontece com a respetiva afirmação dual.

Reticulados

Apresenta-se de seguida a definição de reticulado como estrutura algébrica.

Definição

Um triplo $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$*, onde* R *é um conjunto não vazio e* $\wedge$ *e* $\vee$ *são operações binárias em* R*, diz-se um* ***reticulado*** *se, para quaisquer* $x, y, z \in R$*,*

$$\mathrm{R1}: \; x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x$$

(leis comutativas);

$$\mathrm{R2}: \; x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

(leis associativas);

$$\mathrm{R3}: \; x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$$

(leis de idempotência);

$$\mathrm{R4}: \; x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x$$

(leis de absorção).

Exemplo

(1) Considerando que P representa o conjunto das proposições, que $\wedge$ representa o conetivo conjunção e $\vee$ representa o conetivo disjunção, $(P; \wedge, \vee)$ é um reticulado.

(2) Sendo m.d.c. a operação máximo divisor comum em $\mathbb{N}$ e m.m.c. a operação mínimo múltiplo comum, $(\mathbb{N}, m.d.c., m.m.c.)$ é um reticulado.

Teorema

Se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ *é um reticulado, então a relação* $\leq$ *definida em* R *por*

$$a \leq b \ \ \text{se} \ \ a = a \wedge b$$

é uma relação de ordem parcial tal que, para quaisquer $a, b \in R$, *existem* $\inf\{a, b\}$ *e* $\sup\{a, b\}$ *e*

$$\inf\{a, b\} = a \wedge b \text{ e } \sup\{a, b\} = a \vee b.$$

Se $(R, \leq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado tal que, para quaisquer* $a, b \in R$, *existem* $\inf\{a, b\}$ *e* $\sup\{a, b\}$, *então* $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$, *onde*

$$a \wedge b = \inf\{a, b\} \text{ e } a \vee b = \sup\{a, b\},$$

é um reticulado e, para quaisquer $a, b \in R$,

$$a \leq b \Leftrightarrow a = a \wedge b \Leftrightarrow b = a \vee b.$$

Reticulados

Do resultado anterior segue que os reticulados podem ser completamente caracterizados em termos das operações supremo e ínfimo.

Se Φ é uma afirmação sobre reticulados expressa em termos de $\wedge$ e $\vee$, a afirmação dual de Φ é obtida trocando as ocorrências de $\wedge$ e $\vee$, respetivamente, por $\vee$ e $\wedge$.

Caso Φ seja uma afirmação verdadeira para todos os reticulados, então Φ_d também é verdadeira para todos os reticulados.

Se $(R; \wedge, \vee)$ é um reticulado, então o seu reticulado dual é $(R; \vee, \wedge)$.

Descrição de reticulados

Para ilustrar certos resultados ou para refutar conjeturas a respeito de reticulados pode ser conveniente descrever exemplos de reticulados.

Atendendo a que os reticulados são casos particulares de conjuntos parcialmente ordenados, a descrição de reticulados finitos pode ser feita por meio de diagramas de Hasse.

Alternativamente, considerando um reticulado como uma álgebra $(R; \wedge, \vee)$, um reticulado pode ser descrito recorrendo às tabelas das operações $\wedge$ e $\vee$.

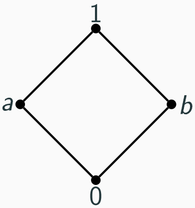
Exemplo

As duas tabelas seguintes

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

descrevem o reticulado representado pelo diagrama de Hasse



Subrreticulados

Definição

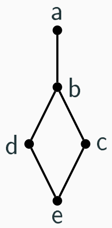
*Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e R' um subconjunto não vazio de R. Diz-se que $\mathcal{R}' = (R'; \wedge', \vee')$ é um **subrreticulado** de $\mathcal{R}$ se $\wedge'$ e $\vee'$ são operações binárias em R' tais que, para quaisquer $a, b \in R'$,*

$$a \wedge' b = a \wedge b \quad e \quad a \vee' b = a \vee b.$$

Note-se que se $\leq$ é a relação de ordem parcial associada a um reticulado $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ e R' é um subconjunto não vazio de R, não é suficiente que $(R', \leq_{|_{R'}})$ seja um reticulado para que seja um subrreticulado de $(R, \leq)$.

Reticulados

O exemplo seguinte ilustra este tipo de situação: considerando o reticulado $(\{a, b, c, d, e\}, \leq)$ a seguir representado e sendo $R' = \{a, c, d, e\}$, então $(R', \leq_{|_{R'}})$ é um reticulado, mas não é subreticulado do reticulado indicado.



Dados um reticulado $(R, \leq)$ e um subconjunto não vazio R' de R, um c.p.o. $(R', \leq')$ é um subrreticulado de $(R, \leq)$ se $\leq' = \leq_{|_{R'}}$, $(R', \leq_{|_{R'}})$ é um reticulado e, para quaisquer $a, b \in R'$, o supremo e o infímo de $\{a, b\}$ em $(R', \leq_{|_{R'}})$ coincidem o supremo e o infímo de $\{a, b\}$ em $(R, \leq)$.

Produtos

A partir de reticulados $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ define-se naturalmente um reticulado que tem como conjunto suporte o conjunto $R_1 \times R_2$.

Teorema

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$, $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ *reticulados e sejam* $\wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ *e* $\vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ *as operações binárias definidas em* $R_1 \times R_2$ *por*

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) &= (a_1 \wedge_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \wedge_{\mathcal{R}_2} b_2),\\ (a_1, a_2) \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) &= (a_1 \vee_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \vee_{\mathcal{R}_2} b_2).\end{aligned}$$

Então $(R_1 \times R_2; \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2})$ *é um reticulado.*

Definição

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$, $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ *reticulados e sejam* $\wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ *e* $\vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ *as operações binárias definidas em* $R_1 \times R_2$ *por*

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) &= (a_1 \wedge_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \wedge_{\mathcal{R}_2} b_2),\\
(a_1, a_2) \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) &= (a_1 \vee_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \vee_{\mathcal{R}_2} b_2).
\end{aligned}
$$

Designa-se por ***reticulado produto de*** $\mathcal{R}_1$ *e* $\mathcal{R}_2$, *e representa-se por* $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, *o reticulado* $(R_1 \times R_2; \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2})$.

Reticulados

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados, $\leq_1$ e $\leq_2$ as relações de ordem associadas, respetivamente, a $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ e seja $\leq$ a relação de ordem definida em $R_1 \times R_2$ por

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \text{ se e só se } a_1 \leq_1 b_1 \text{ e } a_2 \leq_2 b_2.$$

Então $(R_1 \times R_2, \leq)$ é um reticulado. Além disso,

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) = (a_1, a_2) \quad &\Leftrightarrow \quad a_1 \wedge_{\mathcal{R}_1} b_1 = a_1 \text{ e } a_2 \wedge_{\mathcal{R}_2} b_2 = a_2 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 \leq_1 b_1 \text{ e } a_2 \leq_2 b_2 \\
&\Leftrightarrow \quad (a_1, a_2) \leq (b_1, b_2).
\end{aligned}$$

Por conseguinte, o reticulado produto

$$\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 = (R_1 \times R_2; \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2})$$

coincide com o reticulado $(R_1 \times R_2, \leq)$.

Homomorfismos, isomorfismos

Definição

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ *e* $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ *reticulados e* $\alpha : R_1 \to R_2$ *uma aplicação. Diz-se que:*

- α *é um* ***homomorfismo de*** $\mathcal{R}_1$ *em* $\mathcal{R}_2$ *se, para quaisquer* $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \wedge_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \wedge_{\mathcal{R}_2} \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \vee_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{R}_2} \alpha(b);$$

- α *é um* ***isomorfismo de*** $\mathcal{R}_1$ *em* $\mathcal{R}_2$ *se* α *é bijetiva e é um homomorfismo.*

Caso exista um isomorfismo de reticulados de $\mathcal{R}_1$ *em* $\mathcal{R}_2$, *o reticulado* $\mathcal{R}_1$ *diz-se* ***isomorfo*** *ao reticulado* $\mathcal{R}_2$.

Reticulados

Note-se que se α é um isomorfismo de um reticulado $\mathcal{R}_1$ para um reticulado $\mathcal{R}_2$, então α^{-1} é um isomorfismo de $\mathcal{R}_2$ para $\mathcal{R}_1$.

Assim, caso exista um isomorfismo de um reticulado noutro, diz-se somente que os reticulados são isomorfos.

A noção de isomorfismo entre reticulados pode ser estabelecida recorrendo às relações de ordem associadas aos mesmos reticulados.

Teorema

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ *e* $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ *reticulados e* $\leq_1$ *e* $\leq_2$ *as relações de ordem definidas, respetivamente, em* R_1 *e* R_2 *por*

$$a \leq_1 b \text{ sse } a = a \wedge_{\mathcal{R}_1} b, \text{ para quaisquer } a, b \in R_1,$$

$$a \leq_2 b \text{ sse } a = a \wedge_{\mathcal{R}_2} b, \text{ para quaisquer } a, b \in R_2.$$

Então os reticulados $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ *e* $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ *são isomorfos se e só se os c.p.o.s* $(R_1, \leq_1)$ *e* $(R_2, \leq_2)$ *são isomorfos.*

Reticulados completos, reticulados algébricos

Apresentam-se seguidamente duas classes de reticulados que desempenham um papel relevante no estudo de álgebra universal.

Definição

*Um reticulado $(R, \leq)$ diz-se um **reticulado completo** se, para qualquer subconjunto S de R, existem $\bigwedge S$ e $\bigvee S$.*

Reticulados

Exemplo

1) O reticulado $(\mathbb{R}, \leq)$ *não é completo.*

2) O reticulado $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$ *é completo.*

3) O reticulado $(\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} \cup \{-2, 2\}, \leq)$ *é completo.*

4) Dado um conjunto A*,* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *é um reticulado completo.*

Teorema
Seja $(R, \leq)$ *um reticulado tal que existe* $\bigvee S$ *para qualquer subconjunto* S *de* R *ou tal que existe* $\bigwedge S$ *para qualquer subconjunto* S *de* R*. Então* $(R, \leq)$ *é um reticulado completo.*

Observe-se que se $(R, \leq)$ é um reticulado completo, então R tem elemento máximo 1 e elemento mínimo 0 e tem-se $\bigvee \emptyset = 0$ e $\bigwedge \emptyset = 1$.

Note-se também que o teorema anterior pode ser formulado de forma equivalente dos seguintes modos: (i) um reticulado $(R, \leq)$ é completo se R tem elemento máximo e existe ínfimo de qualquer subconjunto não vazio de R; (ii) um reticulado $(R, \leq)$ é completo se R tem elemento mínimo e existe supremo de qualquer subconjunto não vazio de R.

Um reticulado completo pode ter subrreticulados que não são completos; por exemplo, $(\mathbb{R}, \leq)$ é um subrreticulado de $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$.

É também possível acontecer que o subrreticulado de um reticulado completo seja um reticulado completo e que os supremos e ínfimos de certos subconjuntos quando determinados no subrreticulado não coincidam com os supremos e os ínfimos no reticulado - é o caso de $(\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} \cup \{-2, 2\}, \leq)$ subrreticulado de $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$.

Definição

Um subrreticulado R' de um reticulado $(R, \leq)$ diz-se um ***subrreticulado completo de*** *R se, para qualquer subconjunto S de R', $\bigvee S$ e $\bigwedge S$, como definidos em R, pertencem a R'.*

Definição

Seja $(R, \leq)$ um reticulado. Um elemento $a \in R$ diz-se ***compacto*** *se sempre que existe $\bigvee A$ e $a \leq \bigvee A$, para algum $A \subseteq R$, então $a \leq \bigvee B$, para algum conjunto finito $B \subseteq A$.*

Um reticulado R diz-se ***compactamente gerado*** *se, para todo $a \in R$, $a = \bigvee S$, onde S é um subconjunto de R formado por elementos compactos de R.*

Um reticulado R diz-se um ***reticulado algébrico*** *se é um reticulado completo e compactamente gerado.*

Exemplo

1) Todos os elementos de um reticulado finito são compactos.

2) Dado um conjunto A, o reticulado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é algébrico; os elementos compactos deste reticulado são os subconjuntos finitos de A.

3) O reticulado $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$, dos subgrupos de um grupo G, é algébrico; os elementos compactos deste reticulado são os subgrupos de G finitamente gerados.

Teorema

Sejam A um conjunto e f um operador de fecho em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Então $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ é um reticulado completo, onde, para qualquer família não vazia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de A,

$$\bigwedge_{i \in I} f(A_i) = \bigcap_{i \in I} f(A_i) \quad e \quad \bigvee_{i \in I} f(A_i) = f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right).$$

Reciprocamente prova-se que todo o reticulado completo pode ser visto como o reticulado dos subconjuntos fechados de algum conjunto com um operador de fecho.

Teorema

Seja $(R, \leq)$ um reticulado completo. Então $(R, \leq)$ é isomorfo ao reticulado dos subconjuntos fechados de algum conjunto A com um operador de fecho f.

Teorema

Seja A um conjunto. Se f é um operador de fecho algébrico em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, então $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ é um reticulado algébrico e os elementos compactos de $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ são os conjuntos fechados $f(X)$, onde X é um subconjunto finito de A.

Corolário

Seja f um operador de fecho algébrico em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, para algum conjunto A. Então os subconjuntos de A finitamente gerados são precisamente os elementos compactos de $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$.

Teorema

Todo o reticulado algébrico é isomorfo ao reticulado dos subconjuntos fechados de algum conjunto A com um operador de fecho algébrico.

Reticulados distributivos e reticulados modulares

As classes de reticulados mais estudadas são as classes de reticulados distributivos e as classes de reticulados modulares.

Definição

Um reticulado $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ *diz-se um* ***reticulado distributivo*** *se satisfaz uma das seguintes condições:*

D1: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \forall x, y, z \in R,$

D2: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \forall x, y, z \in R.$

As condições D1 e D2 referidas na definição anterior, designadas por ***leis distributivas***, são equivalentes.

Teorema

Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Então $\mathcal{R}$ satisfaz D1 se e só se $\mathcal{R}$ satisfaz D2.

Demonstração.

Admitamos que D1 se verifica. Então

$$\begin{array}{rcll}
x \vee (y \wedge z) & = & (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) & \text{(por R4)} \\
& = & x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) & \text{(por R2)} \\
& = & x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) & \text{(por R1)} \\
& = & x \vee (z \wedge (x \vee y)) & \text{(por D1)} \\
& = & x \vee ((x \vee y) \wedge z) & \text{(por R1)} \\
& = & (x \wedge (x \vee y)) \vee ((x \vee y) \wedge z) & \text{(por R4)} \\
& = & ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) & \text{(por R1)} \\
& = & (x \vee y) \wedge (x \vee z). & \text{(por D1)}
\end{array}$$

A prova de que D2 implica D1 é análoga. $\square$

Reticulados

Note-se que qualquer reticulado satisfaz as desigualdades

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z) \ \text{ e } \ x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Assim, para mostrar que determinado reticulado é distributivo basta verificar uma das desigualdades

$$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \ \text{ ou } \ (x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z).$$

Reticulados

Definição

Um reticulado $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ *diz-se um* ***reticulado modular*** *se, para quaisquer* $x, y, z \in R$,

$$x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z).$$

A condição da definição anterior, designada por ***lei modular***, é equivalente a

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge ((x \wedge y) \vee z),$$

uma vez que $x \leq y$ se e só se $x = x \wedge y$. Também é simples verificar que todo o reticulado satisfaz a condição

$$x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z),$$

pelo que, para mostrar que um reticulado é modular basta verificar que, para quaisquer $x, y, z \in R$,

$$x \leq y \Rightarrow y \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z).$$

Reticulados

Anteriormente vimos que pela formação de subrreticulados, produtos e imagens homomorfas podem ser construídos novos reticulados a partir de reticulados dados. A modularidade e a distributividade são preservadas por estas construções.

Teorema

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ reticulados. Então:

(1) *Se $\mathcal{R}$ é distributivo (modular), então qualquer subrreticulado de $\mathcal{R}$ é distributivo (modular).*

(2) *Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são distributivos (modulares), então $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é distributivo (modular).*

(3) *Se $\mathcal{R}$ é distributivo (modular) e $\mathcal{S}$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{R}$, i.e., se $\mathcal{S} = \alpha(\mathcal{R})$ para algum homomorfismo $\alpha : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$, então $\mathcal{S}$ é distributivo (modular).*

Reticulados

Os dois próximos teoremas dão-nos uma caracterização dos reticulados distributivos e dos reticulados modulares recorrendo aos reticulados M_5 e N_5 a seguir apresentados

Observe-se que nenhum dos reticulados anteriores é distributivo, pois em nenhum dos casos se tem $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

No que respeita à modularidade, o reticulado M_5 é modular, mas no reticulado N_5 tem-se $a \leq b$ e $a \vee (b \wedge c) \neq b \wedge (a \vee c)$, pelo que N_5 não é modular.

Teorema

Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Então $\mathcal{R}$ é modular se e só se não tem qualquer subrreticulado isomorfo a N_5.

Demonstração.

Se $\mathcal{R}$ tem um subrreticulado isomorfo a N_5, então R não é modular.

Reciprocamente, se admitirmos que $\mathcal{R}$ não é modular, então existem $a, b, c \in R$ tais que $a \leq b$ e $a \vee (b \wedge c) < b \wedge (a \vee c)$.

Sejam $a_1 = a \vee (b \wedge c)$ e $b_1 = b \wedge (a \vee c)$. Então

$$
\begin{aligned}
c \wedge b_1 &= c \wedge (b \wedge (a \vee c)) & \\
&= [c \wedge (c \vee a)] \wedge b & \text{(por R1 e R2)} \\
&= c \wedge b & \text{(por R4)}, \\
c \vee a_1 &= c \vee (a \vee (b \wedge c)) & \\
&= [c \vee (b \wedge c)] \vee a & \text{(por R1 e R2)} \\
&= c \vee a & \text{(por R4)},
\end{aligned}
$$

$$c \wedge b \leq c \wedge a_1 \leq c \wedge b_1 = c \wedge b,$$

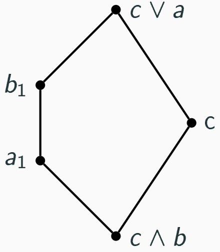
$$c \wedge a_1 = c \wedge b_1 = c \wedge b.$$

De modo análogo, tem-se $c \vee b_1 = c \vee a_1 = c \vee a$.

Demonstração.

Os elementos $c \wedge b$, a_1, c, b_1, $c \vee a$ são distintos dois a dois.

Logo, o reticulado a seguir apresentado



é um subrreticulado de $\mathcal{R}$ e é isomorfo a N_5. $\square$

Teorema

Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ *um reticulado. Então* $\mathcal{R}$ *é distributivo se e só se não tem qualquer subrreticulado isomorfo a* N_5 *ou a* M_5.