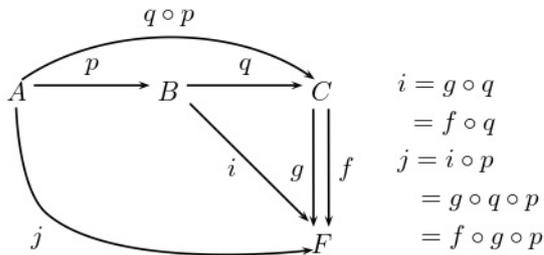


Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 9

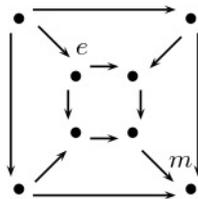
57. Considere a categoria \mathbf{C} definida pelo diagrama seguinte



Indique, caso exista:

- Um morfismo de \mathbf{C} .
- Um morfismo que não seja um epimorfismo de \mathbf{C} .
- Um morfismo de \mathbf{C} .
- Um morfismo de \mathbf{C} .

58. Considere o diagrama seguinte



Sabendo que os quatro trapézios deste diagrama são comutativos, mostre que:

- Se o quadrado mais pequeno é comutativo, então o quadrado maior também é comutativo.
- Se e é um epimorfismo, m é um monomorfismo e o quadrado maior é comutativo, então o quadrado pequeno também é comutativo.

59. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathbf{C} . Mostre que:

- Se f e g são invertíveis à esquerda (respetivamente, direita), então $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita).
- Se $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita), então f é invertível à esquerda (respetivamente, g é invertível à direita).

60. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ um morfismo em \mathbf{C} . Mostre que:

- Se f é invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.
- Se f é invertível à direita, então f é um epimorfismo.

61. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathbf{C} . Mostre que se $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita, então g é um monomorfismo.

62. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos em \mathbf{C} . Mostre que se f e g são isomorfismos, então $g \circ f$ é um isomorfismo e o seu inverso é $f^{-1} \circ g^{-1}$.

63. Mostre que as seguintes condições sobre uma categoria \mathbf{C} são equivalentes:

- Todo o morfismo em \mathbf{C} é invertível à direita;
- Todo o morfismo em \mathbf{C} é invertível à esquerda;

- (13) Todo o morfismo em \mathbf{C} é invertível.
64. Seja $f : A \rightarrow B$ um isomorfismo numa categoria \mathbf{C} . Para cada objeto $C \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, mostre que a função $f_C : \text{hom}(B, C) \rightarrow \text{hom}(A, C)$ definida por $f_C(g) = gf$ é uma bijeção.
65. Mostre que na categoria **Poset**, um morfismo é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo) se e só se for injetivo (respetivamente, sobrejetivo).
66. Mostre que se \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 são duas categorias com objetos terminais (iniciais), então $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ também tem objetos terminais (iniciais).
67. Mostre que se uma categoria tem objeto zero, então todo o objeto inicial (terminal) é objeto zero. Deduza que a categoria **Set** não tem objetos zero.
68. Seja \mathbf{C} uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T . Mostre que se $f : T \rightarrow I$ é um morfismo em \mathbf{C} , então f é um isomorfismo. Conclua que I e T são objetos zero.