Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 7

46. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta, \theta^* \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Mostre que (θ, θ^*) é um par de congruências fator em $\mathcal{A}$ se e só se $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$ e $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$.

47. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1) onde $A = \{a, b, c, d\}$ e $f^{\mathcal{A}} : A \to A$ é a operação definida por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	c	d	a	b

(a) Determine $\Theta(a, b)$ e $\Theta(a, d)$. Justifique que $(\Theta(a, b), \Theta(a, d))$ é um par de congruências fator.

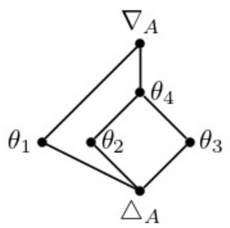
(b) Justifique que existem álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Dê exemplo de álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ nas condições indicadas e determine a álgebra $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

48. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1, 1)$ tal que $A = \{a, b, c, d\}$ e cujas operações $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são definidas por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	b	a	b	a

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	c	d	a	b

Sabendo que o reticulado de congruências de $\mathcal{A}$ pode ser representado por



onde $\theta_1 = \Theta(a, b)$, $\theta_2 = \Theta(a, c)$, $\theta_3 = \Theta(b, d)$ e $\theta_4 = \triangle_A \cup \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$:

(a) Determine θ_1 e justifique que (θ_1, θ_4) é um par de congruências fator.

(b) Justifique que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_4$. Defina as operações da álgebra $\mathcal{A}/\theta_4 = (A/\theta_4; f^{\mathcal{A}/\theta_4}, g^{\mathcal{A}/\theta_4})$.

(c) Diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é:
   i. congruente-distributiva. ii. subdiretamente irredutível.

49. (a) Mostre que toda a álgebra finita com um número primo de elementos é diretamente indecomponível.

(b) Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra tal que $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 5\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ é a operação unária em A definida por

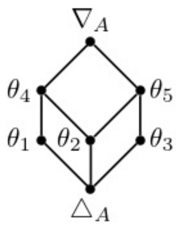
$$f^{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \{2, 4\} \\ 2 & \text{se} \quad x \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

   i. Sejam θ_1 e θ_2 as congruências de $\mathcal{A}$ definidas por $\theta_1 = \Theta(1, 2)$ e $\theta_2 = \Theta(3, 5)$. Determine θ_1 e θ_2. Verifique que $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ e $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$.

   ii. Justifique que se θ e ϕ são congruências de $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$, então $\theta = \nabla_A$ ou $\phi = \nabla_A$.

   iii. Diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível.

50. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra cujo reticulado das congruências é o seguinte:



Justifique que:

(a) A álgebra $\mathcal{A}$ não é congruente-distributiva;

(b) A álgebra $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível;

(c) Os reticulados $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_1$ e $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_3$ são isomorfos.