Folha 6

36. Queremos mostrar que α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$.
Ou seja, que α é um homomorfismo injetivo, de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$

→ qq $n \in \mathbb{N}_0$, qq $\underline{f} \in O_n$, qq $b_1, \dots, b_n \in B$

$$\alpha(\underline{f}^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)) = \underline{f}^{\mathcal{A}}(\alpha(b_1), \dots, \alpha(b_n))$$

→ a aplicação α de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$ é injetiva.
Uma vez que para qq $a, b \in B$ $a \neq b \Rightarrow \alpha(b) \neq \alpha(a)$,
conclui-se que α é injetiva

i) $\alpha(c^{\mathcal{B}}) = c^{\mathcal{A}}$

$$\alpha(c^{\mathcal{B}}) \underset{\text{def } \mathcal{B}}{=} \alpha(1) \underset{\text{def } \alpha}{=} 2 \underset{\text{def } \mathcal{A}}{=} c^{\mathcal{A}}$$

ii) qq $b_1, b_2 \in B$

$$\alpha(*^{\mathcal{B}}(b_1, b_2)) = *^{\mathcal{A}}(\alpha(b_1), \alpha(b_2))$$

$$\alpha(*^{\mathcal{B}}(1,2)) = \alpha(2) = 3 = *^{\mathcal{A}}(2,3) = *^{\mathcal{A}}(\alpha(1), \alpha(2))$$

$$\alpha(*^{\mathcal{B}}(2,1)) = \alpha(2) = 3 = *^{\mathcal{A}}(3,2) = *^{\mathcal{A}}(\alpha(2), \alpha(1))$$

$$\alpha(*^{\mathcal{B}}(1,1)) = \alpha(2) = 3 = *^{\mathcal{A}}(2,2) = *^{\mathcal{A}}(\alpha(1), \alpha(1))$$

$$\alpha(*^{\mathcal{B}}(2,2)) = \alpha(1) = 2 = *^{\mathcal{A}}(3,3) = *^{\mathcal{A}}(\alpha(2), \alpha(2))$$

Assim, α é um monomorfismo.

Seja $\alpha(\mathcal{B})$ a subálgebra de $\mathcal{A}$ com universo $\alpha(B)$.

→ $\alpha(1) = 2$ $\alpha(2) = 3$
logo, α é injetiva e α é sobrejetiva.

Pelo que, α é isomorfismo entre $\mathcal{B}$ e $\alpha(\mathcal{B})$

37. Supondo que $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$
Temos que

i) qq $n \in \mathbb{N}_0$, qq $\underline{f} \in O_n$, qq $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\alpha(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = \underline{f}^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$$

ii) qq $n \in \mathbb{N}_0$, qq $\underline{f} \in O_n$, qq $b_1, \dots, b_n \in A$

$$\alpha(\underline{f}^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)) = \underline{f}^{\mathcal{C}}(\beta(b_1) \dots \beta(b_n))$$

Queremos mostrar que qq $n \in \mathbb{N}_0$, qq $\underline{f} \in O_n$, qq $a'_1, \dots, a'_n \in A$

$$\beta \circ \alpha(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a'_1, \dots, a'_n)) = \underline{f}^{\mathcal{C}}(\beta \circ \alpha(a'_1), \dots, \beta \circ \alpha(a'_n))$$

Tomando então $n \in \mathbb{N}_0$, qq $\underline{f} \in O_n$, $a'_1, \dots, a'_n \in A$

$$\beta \circ \alpha(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a'_1, \dots, a'_n)) \overset{\alpha \in Hom(\mathcal{A},\mathcal{B})}{=} \beta(\underline{f}^{\mathcal{B}}(\alpha(a'_1), \dots, \alpha(a'_n)))$$

$$\overset{\beta \in Hom(\mathcal{B},\mathcal{C})}{=} \underline{f}^{\mathcal{C}}(\beta(\alpha(a'_1)), \dots, \beta(\alpha(a'_n)))$$

$$\overset{def\ \beta\circ\alpha}{=} \underline{f}^{\mathcal{C}}(\beta\circ\alpha(a'_1), \dots, \beta\circ\alpha(a'_n))$$

Logo $\beta \circ \alpha \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{C})$

38. Admitindo que $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um isomorfismo.

Temos que

i. – qq $n \in \mathbb{N}_0$, qq $\underline{f} \in O_n$, qq $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\alpha(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = \underline{f}^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$$

ii. – α é bijetiva

Logo, para cada $b_1, \dots, b_n$ existe $a_1, \dots, a_n$ tal que $\alpha(a_1) = b_1, \dots \alpha(a_n) = b_n$

~~Logo, para cada $b_1, \dots, b_n$ existe um $a_1, \dots, a_n$ tal que $\alpha(a_1, \dots, a_n) = b_n$~~

Queremos mostrar que α^{-1} é um isomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, ou seja, que:

i. α^{-1} é bijetiva – imediato, uma vez que α é bijetiva

ii. qq $n \in \mathbb{N}_0$, qq $\underline{f} \in O_n$, $b_1, \dots, b_n \in B$

$$\alpha^{-1}(\underline{f}^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)) = \underline{f}^{\mathcal{A}}(\alpha^{-1}(b_1), \dots, \alpha^{-1}(b_n))$$

ii. Sejam $\underline{f} \in O_n$ e $b_1, \dots, b_n \in B$, (*) $a_1, \dots, a_n$ tais que $\alpha(a_1) = b_1, \dots \alpha(a_n) = b_n$

$$\alpha^{-1}(\underline{f}^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)) \overset{(*)}{=} \alpha^{-1}(\underline{f}^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)))$$

$$\overset{\alpha \in Hom(\mathcal{A},\mathcal{B})}{=} \alpha^{-1}\alpha(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n))$$

$$\overset{\alpha^{-1}\circ\alpha = id_A}{=} \underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$$

$$\overset{(*)}{=} \underline{f}^{\mathcal{A}}(\alpha^{-1}(b_1), \dots, \alpha^{-1}(b_n))$$

39.

a) Supondo que $\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}$ e $\mathcal{A}_1 \in Sub(\mathcal{A})$

Queremos dem. que $\alpha(A_1) \in Sub(\mathcal{B})$

Sejam $\underline{f} \in O_n$, $b_1, \dots, b_n \in \alpha(A_1)$, ou seja, existe $a \in A_1$ tq

$$\alpha(a) = \underline{f}^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)$$

Por def. de $\alpha(A_1)$, existem (*) $a_1, \dots, a_n \in A$, t.q. $\alpha(a_1) = b_1, \dots, \alpha(a_n) = b_n$.

Basta tomar $a = \underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$

– $a \in A_1$ pq $A_1 \in Sub(A)$ e $\{a_1, \dots, a_n\} \in A$.

– $\alpha(a) = \alpha(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) \overset{\alpha \in Hom(\mathcal{A},\mathcal{B})}{=} \underline{f}^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$

$$\overset{(*)}{=} \underline{f}^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)$$

b) $\alpha^{\leftarrow}(B_1) = \{ a \in A : \alpha(a) \in B_1 \}$

Sup. $\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}$ e $B_1 \in Sub(\mathcal{B})$

Queremos dem que $\alpha^{\leftarrow}(B_1) \in Sub(\mathcal{A})$

Sejam $\underline{f} \in O_n$ e $a_1, \dots, a_n \in \alpha^{\leftarrow}(B_1)$

Falta ver que $\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in \alpha^{\leftarrow}(B_1)$, ou seja,

existe $b \in B_1$ tq $\alpha^{\leftarrow}(b) = \underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$

Por def. de $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$, existem $b_1, \dots, b_n \in B_1$
tais que $\alpha^{\leftarrow}(b_1) = a_1, \dots, \alpha^{\leftarrow}(b_n) = a_n$, neste caso, $b_1 = \alpha(a_1), \dots, b_n = \alpha(a_n)$

Basta tomar $b = \underline{f}^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)$

- $b \in B_1$, pq $B_1 \in sub(\mathcal{B})$ e $b \in B$.
- $\alpha^{\leftarrow}(b) = \alpha^{\leftarrow}(\underline{f}^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n))$

$$= \alpha^{\leftarrow}(\underline{f}^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)))$$

$$\overset{\alpha \in Hom(\mathcal{A},\mathcal{B})}{=} \alpha^{\leftarrow} \circ \alpha(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n))$$

$$= \underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$$

40. Sup. $\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \xrightarrow{\beta} \mathcal{B}$

Queremos dem que $Eq(\alpha, \beta) \in Sub(\mathcal{A})$.

Sejam $\underline{f} \in O_n$ e $a_1, \dots, a_n \in Eq(\alpha, \beta)$

Falta ver que $\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in Eq(\alpha, \beta)$, ou seja,

$\alpha(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = \beta(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n))$

$$\alpha(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) \overset{\alpha \in Hom(\mathcal{A},\mathcal{B})}{=} \underline{f}^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$$

$$\overset{a_1, \dots, a_n \in Eq(\alpha,\beta)}{=} \underline{f}^{\mathcal{B}}(\beta(a_1), \dots, \beta(a_n))$$

$$\overset{\beta \in Hom(\mathcal{A},\mathcal{B})}{=} \beta(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n))$$

Logo $Eq(\alpha, \beta)$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$

41

a) $\boxed{\Rightarrow}$ Admitindo que θ satisfaz a propriedade de substituição, ou seja,

qq $n \in \mathbb{N}_0$, qq $f \in F$ de aridade n qq $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, $(b_1, \ldots, b_n) \in A^n$
(**) se $a_1 \theta b_1$ e ... e $a_n \theta b_n$ então $f(a_1, \ldots, a_n) \theta f(b_1, \ldots, b_n)$

Queremos mostrar que θ é subuniverso de $A \times A$, ou seja,
se (*) $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \theta$ então $\underline{f}^{A\times A}((a_1,b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in \theta$

Ora, $\underline{f}^{A\times A}((a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)) \overset{\text{def } A\times A}{=} (\underline{f}^A(a_1, \ldots, a_n), \underline{f}^A(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta$,

por (*) e (**)

$\boxed{\Leftarrow}$ Admitindo que θ é um subuniverso de $A \times A$, ou seja,
se $(a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n) \in \theta$ então $\underline{f}^{A\times A}((a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)) \in \theta$

Queremos mostrar que qq $n \in \mathbb{N}_0$, qq $f \in F$ de aridade n qq $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, $(b_1, \ldots, b_n) \in A^n$
se $a_1 \theta b_1$ e ... e $a_n \theta b_n$ então $f(a_1, \ldots, a_n) \theta f(b_1, \ldots, b_n)$

$\theta \ni \underline{f}^{A\times A}((a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)) \overset{\text{def } A\times A}{=} (\underline{f}^A(a_1, \ldots, a_n), \underline{f}^A(b_1, \ldots, b_n))$

b) Admitindo que θ e ψ são subuniversos de $A\times A$, sabemos que:

i. se $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \theta$ então $\underline{f}^{A\times A}((a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)) \in \theta$

ii. se $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \psi$ então $\underline{f}^{A\times A}((a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)) \in \theta$

Queremos mostrar que:
se $(a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n) \in \theta \circ \psi$ então $\underline{f}^{A\times A}((a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n)) \in \theta \circ \psi$

Considerando $(a_1,b_1), \ldots, (a_n,b_n) \in \theta \circ \psi$, então existe $c_1, \ldots, c_n$ tq
$(a_1,c_1), \ldots, (a_n,c_n) \in \psi$
$(c_1,b_1), \ldots, (c_n,b_n) \in \theta$

Logo $\underline{f}^{A\times A}((c_1,b_1), \ldots, (c_n,b_n)) \in \theta$
$\underline{f}^{A\times A}((a_1,c_1), \ldots, (a_n,c_n)) \in \psi$
θ e ψ são subuniversos de $A\times A$

$(\underline{f}^A(a_1, \ldots, a_n), \underline{f}^A(c_1, \ldots, c_n)) \in \psi$
$(\underline{f}^A(c_1, \ldots, c_n), \underline{f}^A(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta$
θ e ψ são subuniversos de $A\times A$ logo sat a prop de substituição (por 41a)

Logo $(\underline{f}^A(a_1, \ldots, a_n), \underline{f}^A(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta \circ \psi$

Assim, $\theta \circ \psi$ satisfaz a propriedade da substituição, logo, por 41 a), $\theta \circ \psi$ é subuniverso de $A \times A$.

42. $A \xrightarrow{\alpha} B$

$\boxed{\Rightarrow}$ Admitindo que α é injetiva, ou seja (1) para $x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow \alpha(x) \neq \alpha(y)$.

Queremos mostrar que $\ker \alpha = \Delta_A$, ou seja,

$$\{(a_1, a_2) \in A^2 \mid \alpha(a_1) = \alpha(a_2)\} = \Delta_A.$$

Por (1), temos que $\alpha(a_1) = \alpha(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$,
Logo $\ker \alpha = \Delta_A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ (Quase a mesma coisa.)

43.

a) $\theta, \rho \in \mathrm{Con}\,\mathcal{A}$
→ relação de equivalência
↪ satisfaz prop. de substituição

Queremos mostrar que:
se qq $n \in \mathbb{N}_0$, qq $\underline{f} \in O_n$, qq $a_1, \ldots, a_n \in A$
$$\alpha(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = \underline{f}^{\mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))$$

Então: se $n \in \mathbb{N}_0$, $\underline{f} \in O_n$, $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\begin{aligned}
\alpha(\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= ([\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\theta, [\underline{f}^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\rho) \\
&= (f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta), f^{\mathcal{A}/\rho}([a_1]_\rho, \ldots, [a_n]_\rho)) \\
&= f^{\mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho}(([a_1]_\theta, [a_1]_\rho), \ldots, ([a_n]_\theta, [a_n]_\rho)) \\
&= f^{\mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)).
\end{aligned}$$

b) Para quaisquer $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}
(a, b) \in \ker \alpha &\Leftrightarrow \alpha(a) = \alpha(b) \\
&\Leftrightarrow ([a]_\theta, [a]_\rho) = ([b]_\theta, [b]_\rho) \\
&\Leftrightarrow [a]_\theta = [b]_\theta \text{ e } [a]_\rho = [b]_\rho \\
&\Leftrightarrow (a, b) \in \theta \text{ e } (a, b) \in \rho \\
&\Leftrightarrow (a, b) \in \theta \cap \rho.
\end{aligned}$$

Logo $\ker \alpha = \theta \cap \rho$

A func. α é injetiva sse $\ker \alpha = \Delta_A$. Considerando o provado anteriormente, segue que α é injetiva sse $\theta \cap \rho = \Delta_A$.

c) $\boxed{\Rightarrow}$ Admitamos que α é sobrejetiva. Pretendemos provar que $\theta \circ \rho = \nabla_A$
Uma vez q̄ θ e ρ são rel. binárias em A, $\theta \circ \rho$ é uma rel. binária em A e, portanto, $\underline{\theta \circ \rho \subseteq \nabla_A}$
Sejam $a, b \in A$. Então $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$. Considerando que α é sobrj., existe $c \in A$
t.q. $\alpha(c) = ([a]_\theta, [b]_\rho)$, donde segue que $([c]_\theta, [c]_\rho) = ([a]_\theta, [b]_\rho)$ e, por conseguinte $[c]_\theta = [a]_\theta$ e
$[c]_\rho = [b]_\rho$. Assim, $(c, a) \in \theta$ e $(b, c) \in \rho$, pelo que $(b, a) \in \theta \circ \rho$. Assim, para qq $a, b \in A$, $(b, a) \in \theta \circ \rho$,
ou seja, $\underline{\nabla_A \subseteq \theta \circ \rho}$.

$\Leftarrow$) Admitamos que $\nabla_A = \theta \circ \rho$. Pretende-se provar que α é sobrejetiva
Seja $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$. Para qq $a, b \in A$, tem-se $(b, a) \in \nabla_A$ e, uma vez q̄ $\nabla_A = \theta \circ \rho$,
$(b, a) \in \theta \circ \rho$. Então existe $c \in A$ t.q. $(b, c) \in \rho$ e $(c, a) \in \theta$. Assim $[a]_\theta = [c]_\theta$ e $[b]_\rho = [c]_\rho$.
Logo $([a]_\theta, [b]_\rho) = ([c]_\theta, [c]_\rho)$. Portanto, para qq $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$, existe
$c \in A$ t.q. $([a]_\theta, [b]_\rho) = \alpha(c)$, i.e., α é sobrejetiva.

44.

a) Pertende-se mostrar que se qq $n \in \mathbb{N}_0$, qq $\underline{f} \in \mathcal{O}_n$, qq $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\alpha(\underline{f}^A(a_1, \dots, a_n)) = \underline{f}^{B\times C}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$$

$$\alpha(\underline{f}^A(a_1,\dots,a_n)) \overset{\text{def } \alpha}{=} (\alpha_1(\underline{f}^A(a_1,\dots,a_n)), \alpha_2(\underline{f}^A(a_1,\dots,a_n)))$$

$$\overset{\alpha_1 \in Hom(A,B),\ \alpha_2 \in Hom(A,C)}{=} (\underline{f}^B(\alpha_1(a_1),\dots,\alpha_1(a_n)), \underline{f}^C(\alpha_2(a_1),\dots,\alpha_2(a_n)))$$

$$\overset{\text{def } B\times C}{=} \underline{f}^{B\times C}((\alpha_1(a_1),\alpha_2(a_1)),\dots,(\alpha_1(a_n),\alpha_2(a_n)))$$

$$\overset{\text{def } \alpha}{=} \underline{f}^{B\times C}(\alpha(a_1),\dots,\alpha(a_n))$$

b) $(a_1, a_2) \in \ker(\alpha) \Leftrightarrow \alpha(a_1) = \alpha(a_2)$

$\Leftrightarrow (\alpha_1(a_1), \alpha_2(a_1)) = (\alpha_1(a_2), \alpha_2(a_2))$

$\Leftrightarrow (\alpha_1(a_1) = \alpha_1(a_2)$ e $\alpha_2(a_1) = \alpha_2(a_2))$

$\Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \ker(\alpha_1)$ e $(a_1, a_2) \in \ker(\alpha_2)$

$\Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \ker(\alpha_1) \cap \ker(\alpha_2)$

Logo $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker(\alpha_2)$

c) Comecemos por mostrar que se α é um epimorfismo, então α_1 e α_2 são epimorfismos. Uma vez que α_1 e α_2 são homomorfismos, resta provar que α_1 e α_2 são funções sobrejetivas.
Seja $b \in B$. Como $C \neq \emptyset$, existe $c \in C$. Logo $(b,c) \in B \times C$. Considerando que α é um epimorfismo, existe $a \in A$ t.q. $\alpha(a) = (b,c)$, i.e., existe $a \in A$ tal que $(\alpha_1(a), \alpha_2(a)) = (b,c)$. Logo, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ t.q. $\alpha_1(a) = b$. Assim α_1 é sobrejetiva.
De modo análogo, prova-se que α_2 é sobrejetiva.

Pelo Teorema do Homomorfismo, tem-se

$$A/\ker\alpha \cong \alpha(A),\ A/\ker\alpha_1 \cong \alpha_1(A) \text{ e } A/\ker\alpha_2 \cong \alpha_2(A.$$

Uma vez que α, α_1 e α_2 são sobrejetivas, tem-se

$$A/\ker\alpha) \cong B \times C,\ A/(\ker\alpha_1) \cong B \text{ e } A/(\ker\alpha_2) \cong C$$

Assim,

$$A/(\ker(\alpha) \cong A/(\ker\alpha_1) \times A/(\ker\alpha_2)$$

Pelo que, considerando a alínea anterior, tem-se

$$A/(\ker\alpha_1 \cap \ker\alpha_2) \cong A/(\ker\alpha_1) \times A/(\ker\alpha_2).$$

45.

a)

i. $\nabla_A / \theta = \{ ([a]_\theta, [b]_\theta) \in (A/\theta)^2 \mid (a,b) \in \nabla_A \}$

$= \nabla_{A/\theta}$

ii. $\theta/\theta = \{ ([a]_\theta, [b]_\theta) \in (A/\theta)^2 \mid (a,b) \in \theta \}$

$= \Delta_{A/\theta}$

b) Queremos mostrar que $([\theta, \nabla_A], \subseteq) \cong (Con(A/\theta), \subseteq)$

Vejamos que $\alpha: [\theta, \nabla_A] \to Con(A/\theta)$ é um mergulho sobrejetivo
$\alpha(\phi) = \phi/\theta$

i) α é mergulho, ou seja: qq $\phi_1, \phi_2 \in [\theta, \nabla_A]$,
$\phi_1 \subseteq \phi_2$ sse $\underbrace{\alpha(\phi_1)}_{\phi_1/\theta} \subseteq \underbrace{\alpha(\phi_2)}_{\phi_2/\theta}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supondo $\phi_1 \subseteq \phi_2$.
Supondo $([a]_\theta, [b]_\theta) \in \phi_1/\theta$.
Falta ver que $([a]_\theta, [b]_\theta) \in \phi_2/\theta$, ou seja,
$(a,b) \in \phi_2$.
Por def. de ϕ_1/θ, temos $(a,b) \in \phi_1$. Por $\phi_1 \subseteq \phi_2$ segue
$(a,b) \in \phi_2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supondo $\alpha(\phi_1) \subseteq \alpha(\phi_2)$
Supondo

ii) α é sobrejetivo

46. $\theta, \theta^* \in \mathrm{Con}\, A$.

Queremos mostrar que
(θ, θ^*) é um par de congr. fator em A $\Leftrightarrow$ $\theta \cap \theta^* = \Delta_A$ e $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$

$\boxed{\Rightarrow}$ Admitamos que (θ, θ^*) é um par de congruências fator.

Daí temos que: i) $\theta \cap \theta^* = \Delta_A$
ii) $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$
iii) $\theta \vee \theta^* = \nabla_A$

Queremos mostrar que

1) $\theta \cap \theta^* = \Delta_A$ ✓ por (i)

2) $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$
Uma vez que θ, θ^* são permutáveis, então $\theta \circ \theta^* \overset{\text{(por ii)}}{=} \theta \vee \theta^* \overset{\text{iii}}{=} \nabla_A$

$\boxed{\Leftarrow}$ Admitamos que
i) $\theta \cap \theta^* = \Delta_A$
ii) $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$

Queremos mostrar que: 1) $\theta \cap \theta^* = \Delta_A$ ✓ por (i)

2) $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$

3) $\theta \vee \theta^* = \nabla_A$

De ii) segue que $(\theta \circ \theta^*)^{-1} = (\nabla_A)^{-1}$
Mas $\nabla_A^{-1} = \nabla_A$ e $(\theta \circ \theta^*)^{-1} = (\theta^*)^{-1} \circ \theta^{-1} \overset{\text{pq } \theta \text{ e } \theta^* \text{ são rel. simétricas}}{=} \theta^* \circ \theta$
Logo $\theta^* \circ \theta = \nabla_A$

Assim, $\theta \circ \theta^* = \nabla_A = \theta^* \circ \theta$, logo 2) é satisfeita.

Como θ e θ^* são permutáveis, segue que $\theta \vee \theta^* = \theta \circ \theta^* = \nabla_A$.
Logo 3) é satisfeita.

47.
a) $\theta(a,b) = \Delta_A \cup \{(a,b), (b,a), (c,d), (d,c)\}$

$\theta(a,d) = \Delta_A \cup \{(a,d), (d,a), (c,b), (b,c)\}$

Queremos mostrar que $(\theta(a,b), \theta(a,d))$ é um par de congruências fator.
Pelo ex 46, basta demonstrar que I) $\theta(a,b) \cap \theta(a,d) = \Delta_A$ II) $\theta(a,b) \circ \theta(c,d) = \nabla_A$

I) $\theta(a,b) \cap \theta(a,d) = (\Delta_A \cup \{(a,b), (b,a), (c,d), (d,c)\}) \cap (\Delta_A \cup \{(a,d), (d,a), (c,b), (b,c)\})$
$= \Delta_A$

II) $\theta(a,b) \circ \theta(a,d) = \Delta_A \cup \{(a,d), (d,a), (c,b), (b,c), (a,b), (b,a), (c,d), (d,c),$
$(a,c), (d,b), (c,a), (b,d)\}$
$= \nabla_A$

b) Teorema: Sejam $\mathcal{A}$ álgebra e (θ_1, θ_2) um par de congruências-fator em $\mathcal{A}$. Então: $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_2$.

Logo, uma vez que $(\theta(a,b), \theta(a,d))$ é um par de congruências-fator,

$\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta(a,b) \times \mathcal{A}/\theta(a,d)$

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}/\theta(a,b)$ é uma álgebra não trivial porque $\theta(a,b) \neq \nabla_A$

$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}/\theta(a,d)$ é uma álgebra não trivial porque $\theta(a,d) \neq \nabla_A$

$\mathcal{A}_1 = (A/\theta(a,b); f')$

$f' : A/\theta(a,b) \longrightarrow A/\theta(a,b)$

x	$[a]_{\theta(a,b)}$	$[c]_{\theta(a,b)}$
$f'(x)$	$[c]_{\theta(a,b)}$	$[a]_{\theta(a,b)}$

$\mathcal{A}_2 = (A/\theta(a,d); f'')$

$f'' : A/\theta(a,d) \longrightarrow A/\theta(a,d)$

x	$[a]_{\theta(a,d)}$	$[c]_{\theta(a,d)}$
$f''(x)$	$[c]_{\theta(a,d)}$	$[a]_{\theta(a,d)}$

OBS: $\mathcal{A}/\theta(a,b) \cong \mathcal{A}/\theta(a,d) =: \mathcal{B}$

$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{B}$

$\mathcal{B} = (B, g)$ $\quad B = \{b_1, b_2\}$ $\quad g(b_1) = b_2$, $g(b_2) = b_1$

$\mathcal{B} \times \mathcal{B} = (B \times B; g^{B\times B})$

$g^{B\times B}(x,y) = (g(x), g(y))$

48.

a) $\theta_1 = \Delta_A \cup \{(a,b), (b,a), (c,d), (d,c)\}$

1) $\theta_1 \cap \theta_4 = \Delta_A$ ✓

2) $\theta_1 \circ \theta_4 = \Delta_A \cup \{(a,b), (b,a), (c,d), (d,c), (a,c), (c,a), (b,d), (d,b), (a,d), (b,c), (c,b), (d,a)\} = \theta_4 \circ \theta_1$

3) $\theta_1 \vee \theta_4 = \Delta_A \cup \theta_1 \cup \theta_4 \cup \{(a,d), (b,c), (c,b), (d,a)\} = \nabla_A$.

b) Uma vez que (θ_1, θ_4) é um par de congruências fator, tem-se (pelo Teorema dado nas aulas) $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_4$.

$\mathcal{A}/\theta_4 = (A/\theta_4, f^{A/\theta_4}, g^{A/\theta_4})$ $\quad A/\theta_4 = \{[a]_{\theta_4}, [b]_{\theta_4}\}$

$f^{A/\theta_4} : A/\theta_4 \longrightarrow A/\theta_4$ é a operação definida por

$f^{A/\theta_4}([a]_{\theta_4}) = [f^{A}(a)]_{\theta_4} = [b]_{\theta_4}$

$f^{A/\theta_4}([b]_{\theta_4}) = [f^{A}(b)]_{\theta_4} = [a]_{\theta_4}$

$g^{B/\theta_4} : A/\theta_4 \longrightarrow A/\theta_4$ é a operação definida por

$g^{A/\theta_4}([a]_{\theta_4}) = [g^{A}(a)]_{\theta_4} = [a]_{\theta_4}$

$g^{A/\theta_4}([b]_{\theta_4}) = [g^{A}(b)]_{\theta_4} = [b]_{\theta_4}$

c) ii. A álgebra é subdiretamente irredutível sse é trivial ou se tirando a id_A ao reticulado de congruências, este tem elemento mínimo.

Pela observação do reticulado, conclui-se que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ são os elementos minimais do reticulado. Uma vez que estes são incomparáveis, o reticulado não tem elemento mínimo. Logo $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

49.

a) Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra do tipo $(0, \tau)$, onde $|A| = n$, com $n \in \mathbb{N}$ e n primo. Sejam $\mathcal{A}_1 = (A_1; G)$ e $\mathcal{A}_2 = (A_2; H)$ álgebras de tipo $(0, \tau)$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Como $\mathcal{A}$ é finita, então $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são finitas e tem-se $|A| = |A_1 \times A_2| = |A_1| \times |A_2|$. Como $|A| = n$ e n é primo, segue que $|A_1| = 1$ ou $|A_2| = 1$; logo $\mathcal{A}_1$ é a álgebra trivial ou $\mathcal{A}_2$ é a álgebra trivial. Portanto, a álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível.

b) i. $\theta_1 = \Delta_A \cup \{(1,2), (2,1)\}$

$\theta_2 = \Delta_A \cup \{(3,5), (5,3)\}$

$\rightarrow \theta_1, \theta_2 \in Con\,\mathcal{A} \setminus \{\Delta_A\}$

De facto, $\theta_1 \in Con\,\mathcal{A}$ e $\theta_1 \neq \Delta_A$, pois $(1,2) \in \theta_1$ e $(1,2) \notin \Delta_A$
$\theta_2 \in Con\,\mathcal{A}$ e $\theta_2 \neq \Delta_A$, pois $(3,5) \in \theta_2$ e $(3,5) \notin \Delta_A$

$\theta_1 \cap \theta_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\} = \Delta_A$.

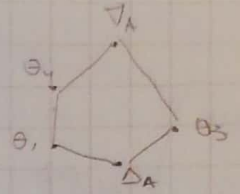
ii. A álgebra $\mathcal{A}$ tem um número primo de elementos ($|A| = 5$). Logo, por (a), conclui-se que $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível. Então, se θ e ϕ são congruências de $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$, $\mathcal{A}/\theta$ é a álgebra trivial ou $\mathcal{A}/\phi$ é a álgebra trivial. No primeiro caso, tem-se, $\theta = \nabla_A$; no segundo caso tem-se $\phi = \nabla_A$.

iii. A álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível se e só se $\mathcal{A}$ é a álgebra trivial ou $Con\,\mathcal{A} \setminus \{\Delta_A\}$ tem elemento mínimo.

A álgebra $\mathcal{A}$ não é trivial ($|A| = 5$). Da alínea (b) i, sabe-se que existem $\theta_1, \theta_2 \in Con\,\mathcal{A} \setminus \{\Delta_A\}$ t.q. $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$ e, portanto, $Con\,\mathcal{A} \setminus \{\Delta_A\}$ não tem elemento mínimo. Logo, $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

50.

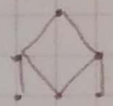
a) O reticulado



é um subreticulado de Con A

e é isomorfo a N_5. Logo a álgebra A ñ é congruente-distributiva.

b) A álgebra A não é trivial, pois $\mathrm{Con}\,A \setminus \{\Delta_A\} \neq \emptyset$.
Além disso, o c.p.o $\mathrm{Con}\,A \setminus \{\Delta_A\}$



ñ tem elemento mínimo. Logo, a álgebra A ñ é sb. irredutível.

51.

a) Uma vez que:

- $\{M\}$ é uma classe;

- hom é uma correspondência que a cada par de elementos de $\{M\}$ associa um conjunto;

- id associa a cada elemento de $\{M\}$ um elto de $\hom(M, M)$;

- $\circ$ é uma operação que a cada par $(f: M \to M,\ g: M \to M)$ de elementos de $\hom(M, M)$ associa um elto de $\hom(M, M)$;

- para quaisquer $A, B, C, D \in \{M\}$
$(A,B) \neq (C,D) \Rightarrow \hom(A,B) \cap \hom(C,D) = \emptyset$

- para qualquer $m \in M$, $id_M \circ m = 1_M \cdot m = m$
$m \circ id_M = m \cdot 1_M = m$

- para qq $m, n, p \in M$,

$$\begin{aligned} m \circ (n \circ p) &= m \cdot (n \cdot p) \\ &= (m \cdot n) \cdot p \\ &= (m \circ n) \circ p \end{aligned}$$

Concluímos que M é uma categoria

53. Admitamos que os triângulos internos do diagrama comutam.
Então $p \circ f = s$, $h \circ q = t$, $l \circ k = t \circ s$, $q \circ p = g$

Logo
$$\begin{aligned} l \circ k &= t \circ s \\ &= (h \circ q) \circ (p \circ f) \\ &= h \circ (q \circ p) \circ f \\ &= h \circ g \circ f \end{aligned}$$

55.

a)
$$\begin{tikzcd}
(A,U) \arrow[r, "(id_A,i)"] \arrow[d, "(f,id_U)"'] \arrow[dr, "(f,i)"] \arrow[dd, bend right=60, "(g,id_U)"'] \arrow[ddr, bend right=90, "(g,i)"'] & (A,V) \arrow[d, "(f,id_V)"] \arrow[dd, bend left=60, "(g,id_V)"] \\
(B,U) \arrow[r, "(id_B,i)"] \arrow[d, "(h,id_U)"'] \arrow[dr, "(h,i)"] & (B,V) \arrow[d, "(h,id_V)"] \\
(C,U) \arrow[r, "(id_C,i)"] & (C,V)
\end{tikzcd}$$

57.

a) p, $q \circ p$, q, i, j, $i \circ p$

b) q, $q \circ p$

c) p, i,

d) id

60.

a) Admitamos que f é invertível à esquerda, então temos: existe $g : B \to A$ tal que (1) $g \circ f = id_A$.

Queremos mostrar que f é um monomorfismo, ou seja, que ~~$f \circ g =$~~ para qualquer h_1, h_2, $f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2$

$$C \overset{h_1}{\underset{h_2}{\rightrightarrows}} A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$$

Suponho $f \circ h_1 = f \circ h_2$. Falta ver que $h_1 = h_2$

$$g \circ (f \circ h_1) = g \circ (f \circ h_2)$$

assoc.

$$\Leftrightarrow (g \circ f) \circ h_1 \overset{\text{assoc.}}{=} (g \circ f) \circ h_2$$

(1)

$$\Leftrightarrow id_A \circ h_1 = id_A \circ h_2$$

$$\Leftrightarrow h_1 = h_2$$

b) Admitamos que f é invertível à direita, então temos que (1) existe g, tal que, $f \circ g = id_B$

Suponho que $h_1 \circ f = h_2 \circ f$, falta mostrar que $h_1 = h_2$

$$(h_1 \circ f) \circ g = (h_2 \circ f) \circ g$$

$$\Leftrightarrow h_1 \circ (f \circ g) = h_2 \circ (f \circ g)$$

$$\Leftrightarrow h_1 \circ id_B = h_2 \circ id_B$$

$$\Leftrightarrow h_1 = h_2$$

64. Pertende-se mostrar

1) Para cada $x, y \in hom(B, C)$, $f_C(x) = f_C(y) \Rightarrow x = y$

2) Para cada $y \in hom(A, C)$, $\exists x$, $f_C(x) = y$

Sabe-se que f é um isomorfismo, ou seja, f é invertível à esquerda e à direita

1) Tomando $x, y \in hom(B, C)$ tq $f_C(x) = f_C(y)$

então $xf = yf$

Uma vez que f é isomorfismo, então f é cancelável à direita, logo $x = y$.

2) $id_A = f^{-1} \circ f$

Seja $a \in hom(A, C)$, então $a = a \circ id_A$
$= a \circ (f^{-1} \circ f)$

Logo $f_C(a \circ f^{-1}) = (a \circ f^{-1}) \circ f = a \circ (f^{-1} \circ f) = a$

Assim, para cada $a \in hom(A, C)$, $\exists x = a \circ f^{-1}$, $f_C(x) = a$