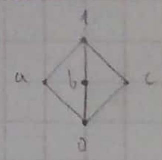
Folha 1

1.



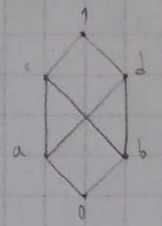
$1 \vee a = 1 \quad 1 \vee b = 1 \quad 1 \vee c = 1 \quad 1 \vee 0 = 1$

$1 \wedge a = a$

$a \vee b = 1 \quad a \vee c = 1 \quad b \vee c = 1$

$a \wedge b = 0 \quad a \wedge c = 0 \quad b \wedge c = 0$

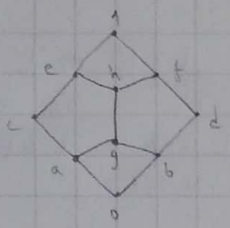
Logo é reticulado



$c \wedge d =$ não existe porque a e b não são comparáveis.

$Min(\{c, d\}) = \{a, b, 0\}$

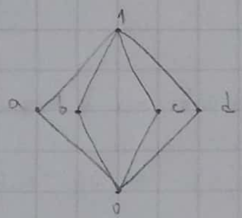
Logo não é reticulado



$c \wedge d = 1 \quad c \vee d = 0 \quad e \wedge f = h \quad e \vee f = 1 \quad a \wedge b = 0 \quad a \vee b = g$

$Maj(\{c, d\}) = \{1\} \quad c \vee d = 1$

Logo é reticulado



$a \wedge b = 0 \quad a \vee b = 1 \quad a \wedge c = 0 \quad a \vee c = 1$

$a \wedge d = 0 \quad a \vee d = 1 \quad b \wedge c = 0 \quad b \vee c = 1$

$b \wedge d = 0 \quad b \vee d = 1 \quad c \wedge d = 0 \quad c \vee d = 1$

Logo é reticulado.

2.

a) Seja $n, m \in \mathbb{N}$. Queremos demonstrar que existem $n \vee m$ e $n \wedge m$.

a) $\underbrace{m.m.c(n, m)}_{L} = n \vee m$

Queremos dem q $\begin{cases} L \in Maj\{n, m\} \\ qq\ L' \in Maj\{n, m\},\ L \leq L' \quad L \mid L' \end{cases}$

m.mc = 6
2, 3
md.c = 1

Uma vez que $L \in Maj\{n, m\}$ sse $n \mid L$ e $m \mid L$ sse L é múltiplo comum de n e m, temos que $L \in Maj\{n, m\}$.

$$\left.\begin{matrix} n \mid L \quad m \mid L \\ n \mid L' \quad m \mid L' \\ L \leq L' \end{matrix}\right\} \Rightarrow L \mid L'$$

b) $\underbrace{md.c(n, m)}_{L} = n \wedge m$

$L' \mid L \Leftarrow \begin{cases} L \mid n \quad L \mid m \\ L' \mid n \quad L' \mid m \\ L \geq L' \end{cases}$

Queremos dem q $\begin{cases} L \in Min\{n, m\} \\ qq\ L' \in Min\{n, m\},\ L \geq L' \quad L' \mid L \end{cases}$

Uma vez que $L \in Min\{n, m\}$ sse $L \mid n$ e $L \mid m$ sse L é divisor comum de n e m, temos que $L \in Min\{n, m\}$.

6) Sejam $N, M \in \mathcal{P}(A)$. Queremos demonstrar que existem $N \vee M$ e $N \wedge M$

a) $\underbrace{N \vee M}_{L} = N \cup M$

Queremos dem q̄ $\begin{cases} L \in \text{Maj}\{N, M\} \\ \text{qq } L' \in \text{Maj}\{N, M\},\ L \leq L' \Rightarrow L \subseteq L' \end{cases}$

Uma vez que $L \in \text{Maj}\{N, M\}$ se e só se $N \subseteq L$ e $M \subseteq L$ sse $N \cup M \subseteq L$, temos que $L \in \text{Maj}\{N, M\}$

$$\left.\begin{array}{ll} N \subseteq L & M \subseteq L \\ N \subseteq L' & M \subseteq L' \\ \multicolumn{2}{c}{L \subseteq L'} \end{array}\right\} \Rightarrow L \subseteq L'$$

b) $\underbrace{N \wedge M}_{L} = N \cap M$

Queremos dem q̄ $\begin{cases} L \in \text{Min}\{N, M\} \\ \text{qq } L' \in \text{Min}\{N, M\},\ L \geq L' \Rightarrow L' \subseteq L \end{cases}$

Uma vez que $L \in \text{Min}\{N, M\}$ sse $L \subseteq N$ e $L \subseteq M$ sse $L \subseteq N \cap M$, temos que $L \in \text{Min}\{N, M\}$.

$$\left.\begin{array}{ll} L \subseteq N & L \subseteq M \\ L' \subseteq N & L' \subseteq M \\ \multicolumn{2}{c}{L' \subseteq L} \end{array}\right\} \Rightarrow L' \subseteq L$$

3. Seja $(A, \leq)$ uma cadeia, então qq $a, b \in A$, $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Queremos provar que qq $a, b \in A$, existem $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$

1° caso: $a \leq b$. Então $a \vee b = b$ $a \wedge b = a$

2° caso: $b \leq a$. Então $a \vee b = a$ $a \wedge b = b$

4. Queremos provar que qq $a, b \in P$, existem $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$

I) Seja $H = \{a, b\} \subseteq P$, por hipótese concluímos que existe $\inf\{a, b\}$.

II) Seja $H' = \text{Maj}\{a, b\}$. Por hipótese existe $\underbrace{\inf H'}_{x}$.

Vejamos que $x = \sup\{a, b\}$

i) $a \in \text{Min } H'$
Uma vez que $H' = \text{Maj}\{a, b\}$, temos que para qq $c \in H'$, $a \leq c$, logo $a \in \text{Min } H'$.

ii) $b \in \text{Min } H'$
Uma vez que $H' = \text{Maj}\{a, b\}$, temos que para $c \in H'$, $b \leq c$ logo $b \in \text{Min } H'$

Logo por def de inf. $x \geq a$ e $x \geq b$. Logo $x \in H'$
Logo x é o mínimo de H', uma vez que o ínfimo de um conjunto pertence ao conjunto é o mínimo. Logo $x = \sup\{a, b\}$.

5.

a) $\boxed{A_1}$

- $a \wedge_1 b = a$ $\quad$ $a \vee_1 b = a$

  $b \wedge_1 a = a$ $\quad$ $b \vee_1 a = b$ $\quad$ Logo A_1 não é comutativa.

- Associativas: $\underbrace{x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z}$ $\quad$ $\underbrace{x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z}$

$x \vee_1 (y \vee_1 z) = (x \vee_1 y) \vee_1 z$

$(=)$ $x \vee_1 y = x \vee_1 z$

$(=)$ $x = x$ ✓

Logo A_1 é associativa.

$\downarrow$

$x \wedge_1 (y \wedge_1 z) = (x \wedge_1 y) \wedge_1 z$

caso $x = a$ e $y = a$

$(=)$ $x \wedge_1 a = a \wedge_1 z$

$(=)$ $a = a$ ✓

caso $x = a$ e $y = b$

$(=)$ $a \wedge_1 (b \wedge_1 z) = (a \wedge_1 b) \wedge_1 z$

$(=)$ $a \wedge_1 z = a \wedge_1 z$

$(=)$ $a = a$ ✓

caso $x = b$ e $y = a$

$(=)$ $b \wedge_1 (a \wedge_1 z) = (b \wedge_1 a) \wedge_1 z$

$(=)$ $b \wedge_1 a = a \wedge_1 z$

$(=)$ $a = a$ ✓

caso $x = b$ e $y = b$

$(=)$ $b \wedge_1 (b \wedge_1 z) = (b \wedge_1 b) \wedge_1 z$

$(=)$ $b \wedge_1 z = b \wedge_1 z$

$(=)$ $z = z$ ✓

- Absorção: $x \vee (x \wedge y) = x$ $\quad$ $x \wedge (x \vee y) = x$

caso $x = a$ e $y = a$

$a \vee_1 (a \wedge_1 a) = a$

$(=)$ $a \vee_1 a = a$

$(=)$ $a = a$ ✓

caso $x = a$ e $y = b$

$a \vee_1 (a \wedge_1 b) = a$

$(=)$ $a \vee_1 a = a$

$(=)$ $a = a$ ✓

caso $x = b$ e $y = a$

$b \vee_1 (b \wedge_1 a) = b$

$b \vee_1 a = b$

$b = b$ ✓

caso $x = b$ e $y = b$

$b \vee_1 (b \wedge_1 b) = b$

$(=)$ $b \vee_1 b = b$

$(=)$ $b = b$ ✓

$x \wedge_1 (x \vee_1 y) = x$ $(=)$

$(=)$ $x \wedge_1 x = x$

caso $x = a$ $\quad$ caso $x = b$

$(=)$ $x = x$ $\quad$ $(=)$ $x = x$.

Logo A_1 satisfaz as leis de absorção

b) Pelas leis de absorção basta dem. que $x \vee x = x \vee (x \wedge y)$

i) $x \vee x \leq x \vee (x \wedge y)$

Basta dem. que $x \vee (x \wedge y)$ é majorante de $\{x\}$

Sabemos que $x \vee (x \wedge y)$ é supremo de x e de $(x \wedge y)$

logo, em particular é majorante de $\{x, x \wedge y\}$. Logo é majorante de $\{x\}$.

ii) $x \vee (x \wedge y) \leq x \vee x$

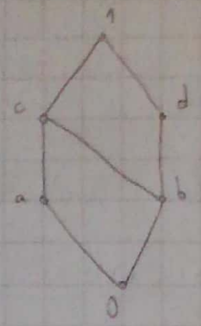
Basta dem. que $x \vee x$ é majorante de $\{x, x \wedge y\}$

Sabemos que $x \vee x$ é supremo de x.

$x \wedge y$ é ínfimo de x e de y, logo é $\leq x$.

Pelo que $x \vee x$ é majorante de x e de $x \wedge y$.

6.



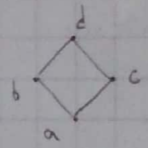
7.

$\wedge$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a	a
b	0	a	b	a	b	b
c	0	a	a	c	c	c
d	0	a	b	c	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\vee$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	b	c	d	1
b	b	b	b	d	d	1
c	c	c	d	c	d	1
d	d	d	d	d	d	1
1	1	1	1	1	1	1

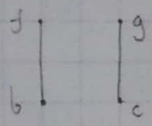
8.

a)



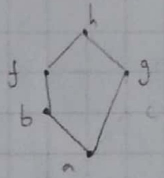
$b \wedge' c = a \in R'$ $b \vee' c = d \in R'$ Logo R' é subreticulado de $(R, \leq)$

b)



Não é reticulado, logo $(R', \leq|_{R'})$ não é subreticulado de $(R, \leq)$

c)



$f \wedge g = c \notin R'$. Logo R' não é fechado para as operações, logo não é subreticulado de $(R, \leq)$

9. Queremos provar que:
I é fechado para as operações, ou seja,
que qq $a, b \in I$, (i) $a \wedge b \in I$ e (ii) $a \vee b \in I$

(i) Por 1, temos que $a \wedge b \in I$

(ii) Por 2) basta dem que $x \wedge (x \wedge y) = x \wedge y$

Ora $x \wedge (x \wedge y) \overset{\text{assoc}}{=} (x \wedge x) \wedge y \overset{\text{idemp}}{=} x \wedge y$

10. $X' = Sg^{\mathcal{R}}(X) = \cap \mathcal{K}$ $\quad \mathcal{K} = \{K \in Sub(\mathcal{R}) \mid X \subseteq K\}$

Queremos provar que:

1) $X' \in Sub(\mathcal{R})$
2) $X \subseteq X'$
3) $\left.\begin{array}{l} Y \in Sub(\mathcal{R}) \\ X \subseteq Y \end{array}\right\} \Rightarrow X' \subseteq Y$

1) Pretendemos provar que X' é fechado para $\wedge$ e para $\vee$.
Sejam $x, y \in X'$. Queremos demonstrar que $x \wedge y \in X'$ e que $x \vee y \in X'$
ou seja, qq $K \in \mathcal{K}$, $x \wedge y \in K$ e $x \vee y \in K$

Seja $K \in \mathcal{K}$. Então $K \in Sub(\mathcal{R})$ e $X \subseteq K$.
De $x, y \in X'$ vem que $x, y \in K$.
Como $K \in Sub(\mathcal{R})$ segue que $x \wedge y \in K$ e que $x \vee y \in K$.

2) Basta demonstrar que qq $K \in \mathcal{K}$, $X \subseteq K$
Ora, se $K \in \mathcal{K}$, $X \subseteq K$, por definição de $\mathcal{K}$

3) qq $K \subseteq R$, se $\underbrace{K \in Sub(\mathcal{R}) \text{ e } X \subseteq K}_{\Updownarrow \; K \in \mathcal{K}}$ então $X' \subseteq K$

Logo $\underbrace{X'}_{\cap \mathcal{K}} \subseteq K$

11.

a) Pretendemos mostrar que, para cada $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in (R_1 \times R_2, \leq)$ existe $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2)$ e $(a_1, a_2) \vee (b_1, b_2)$.

Vamos mostrar que: $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = (a_1 \wedge_1 b_1, a_2 \wedge_2 b_2)$
$(a_1, a_2) \vee (b_1, b_2) = (a_1 \vee_1 b_1, a_2 \vee_2 b_2)$

$\longrightarrow (a_1 \wedge_1 b_1, a_2 \wedge_2 b_2) \leq (a_1, a_2)$

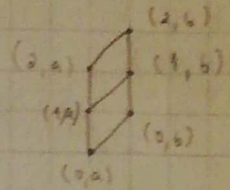
sse $\underbrace{a_1 \wedge_1 b_1 \leq a_1}_{OK}$ e $\underbrace{a_2 \wedge_2 b_2 \leq a_2}_{OK}$

$\longrightarrow$

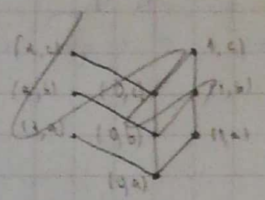
b)

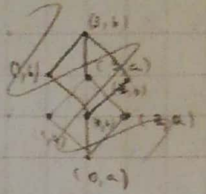
i.

	(0,a)	(0,b)	(1,a)	(1,b)	(2,a)	(2,b)
(0,a)	(0,a)					
(0,b)		(0,b)				
(1,a)			(1,a)			
(1,b)				(1,b)		
(2,a)					(2,a)	
(2,b)						(2,b)



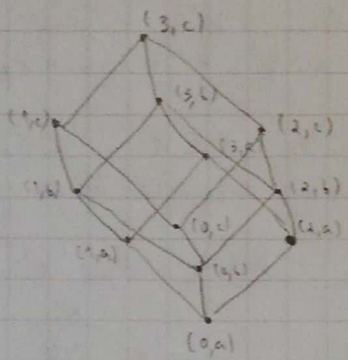
ii.





(3,a) (0,b)

$3 \geq 0$ $a \leq b$



12.

a) f é homomorfismo sse qq $x, y \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} f(\text{mdc}(x,y)) = \text{mdc}(f(x), f(y)) & (*) \\ f(\text{mmc}(x,y)) = \text{mmc}(f(x), f(y)) & (**) \end{cases}$

(*) é verdade porque $n\,\text{mdc}(x,y) = \text{mdc}(nx, ny)$

(**) é verdade porque $n\,\text{mmc}(x,y) = \text{mmc}(nx, ny)$.

Logo f é homomorfismo

b) g é homomorfismo sse qq $x, y \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} g(\text{mdc}(x,y)) = \text{mdc}(g(x), g(y)) & (*) \\ g(\text{mmc}(x,y)) = \text{mmc}(g(x), g(y)) \end{cases}$

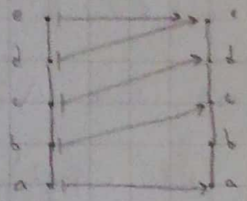
Mas (*) para $x = 3$ e $y = 1$, $2 + \text{mdc}(a,b) \neq \text{mdc}(a+2, b+2)$.
Logo g não é um homomorfismo.

c) h é homomorfismo sse qq $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ $\begin{cases} h(X \cap Y) = h(X) \cap h(Y) \\ h(X \cup Y) = h(X) \cup h(Y) \end{cases}$

Sejam X e Y disjuntos e $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$.
Então $h(X \cap Y) = h(\emptyset) = \emptyset$
Mas $h(X) \cap h(Y) = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$
Logo, h não é homomorfismo.

13.

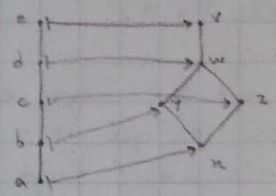
a)



i. Uma vez que temos: qq $a, b \in S_1$ se $a \leq_1 b$ então $h(a) \leq_2 h(b)$, h é isótona.

ii. Uma vez que $h(d) = e = h(e)$, h não é injetiva.
Logo h não é isomorfismo de reticulados.

b)

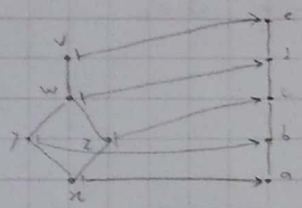


i. $b \leq_1 c$ mas $h(b) = y \not\leq_2 z = h(c)$

Logo h não é isótona

ii. Uma vez que h não é isótona não é um mergulho de ordem, logo não é isomorfismo de reticulados.

c)



i.
$x \leq_2 y \Rightarrow a \leq_1 b$
$x \leq_2 w \Rightarrow a \leq_1 d$
$x \leq_2 z \Rightarrow a \leq_1 c$
$x \leq_2 v \Rightarrow a \leq_1 e$

$y \leq_2 w \Rightarrow b \leq_1 d$
$y \leq_2 v \Rightarrow b \leq_1 e$
$z \leq_2 w \Rightarrow c \leq_1 d$
$z \leq_2 v \Rightarrow c \leq_1 e$

Logo h é isótona.

ii. $h(y \vee_1 z) = h(w) = d$
$h(y) \vee_2 h(z) = b \vee_2 c = c$

Logo h não é homomorfismo, logo não é um isomorfismo

14.

a) $S_2 \subseteq R_2$ $\quad S_2 = h(S_1) = \{h(x) \mid x \in S_1\}$

Vamos ver que S_2 é sub-reticulado de R_2.

i.e. qq. $a, b \in S_2$, $a \wedge_2 b \in S_2$ e $a \vee_2 b \in S_2$.

Sejam $a, b \in S_2$. Então existem $x, y \in S_1$ tais que $h(x) = a$ e $h(y) = b$.

Então $a \wedge_2 b = h(x) \wedge_2 h(y) \overset{h \text{ homomorfismo}}{=} h(x \wedge_1 y) \in S_2$ pois $x \wedge_1 y \in S_1$ ($x, y \in S_1$, S_1 é subreticulado de R_1)

a prova de $a \vee_2 b \in S_2$ é análoga.

b)

15. Queremos provar que $qq\ S \in P$, existem $\vee S$ e $\wedge S$

I) Seja ~~H~~ $S \subseteq P$, por hipótese concluímos que existe $\wedge S$

II) Seja $H' = Maj(S)$. Por hipótese existe $\underbrace{\wedge H'}_{x}$

Vejamos que $x = \vee S$

i) Uma vez que $H' = Maj(S)$, temos que para $h \in H'$, $s \in S$, $s \leq h$, logo $S \subseteq Min\ H'$.

Logo, por def de $\wedge$ $x \geq s$, $s \in S$. Logo $x \in H'$.
Logo x é o mínimo de H', uma vez que se o ínfimo de um conjunto pertence ao conjunto é o mínimo. Logo, $x = \vee S$.

16. 1) R é completo
Seja $S \subseteq R$. Então $S = \{x_1, \dots, x_n\}$,
com $x_1, \dots, x_n \in R$.
Então $\wedge S = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ e $\vee S = x_1 \vee \dots \vee x_n$

2) R é compactamente gerado, ou seja,
$qq\ x \in R$, existe $S \subseteq R$

i) S contém apenas elementos compactos
trivial, uma vez que num reticulado finito todos os elementos são compactos, logo o mesmo é verdade para os elementos de S

ii) $x = \vee S$
Seja $x \in R$, basta tomar $S = \{a \in R \mid x \geq a\}$

I) x é majorante de S
Seja $a \in S$ queremos demonstrar que $a \leq x$, ora isso é verdade pela definição de S.
II) $qq\ b$, $b \in Maj(S)$, $x \leq b$
$qq\ a \in S$, $a \leq b$, mas $x \in S$, logo $x \leq b$.

17.
a) Pretendemos mostrar que

1) $\mathcal{P}(A)$ é completo
2) $\mathcal{P}(A)$ é compactamente gerado.

1) Pretendemos mostrar que $qq\ S \subseteq \mathcal{P}(A)$, existem $\wedge S$ e $\vee S$

I) $I = \bigcap X$, $X \in S$, $I = \wedge S$

$I \subseteq X$. Seja A

18. a) Seja $\mathcal{S} = (S; \wedge', \vee')$ subreticulado de $\mathcal{R}$

Queremos demonstrar que $\mathcal{S}$ é distributivo, ou seja:

qq $x, y, z \in S$

$$x \wedge' (y \vee' z) = (x \wedge' y) \vee' (x \wedge' z)$$

Mas $x \wedge' (y \vee' z) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{S} \text{ subreticulado} \\ \text{de } \mathcal{R}}}{=} x \wedge (y \vee z) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{R} \text{ distributivo}}}{=} (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge' y) \vee' (x \wedge' z)$

b) Queremos demonstrar que

$\mathcal{R} = (R, \wedge_R, \vee_R)$
$\mathcal{S} = (S, \wedge_S, \vee_S)$
$\mathcal{R} \times \mathcal{S} = (R \times S, \wedge', \vee')$

qq $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathcal{R} \times \mathcal{S}$

$$(a,b) \wedge' ((c,d) \vee' (e,f)) = ((a,b) \wedge' (c,d)) \vee' ((a,b) \wedge' (e,f))$$

$$(a,b) \wedge' ((c,d) \vee' (e,f)) = (a,b) \wedge' (c \vee_R e, d \vee_S f)$$

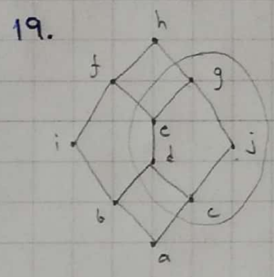
$$= (a \wedge_R (c \vee_R e), b \wedge_S (d \vee_S f))$$

$\mathcal{R}$ é distributivo
$\mathcal{S}$ é distributivo $\rightarrow$ $= ((a \wedge_R c) \vee_R (a \wedge_R e), (b \wedge_S d) \vee_S (b \wedge_S f))$

$$= (a \wedge_R c, b \wedge_S d) \vee' (a \wedge_R e, b \wedge_S f)$$

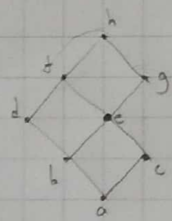
$$= ((a,b) \wedge' (c,d)) \vee' ((a,b) \wedge' (e,f)) \quad \text{c.q.d.}$$

19.

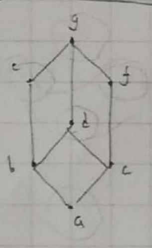


$S = \{a, d, e, g, j\}$

$S \cong N_5$, logo o reticulado não é modular (nem distributivo).



É distributivo, logo é modular

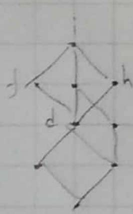


$S = \{a, d, e, f, g\} \cong M_5$

É modular mas não é distributivo.

$e \wedge f$

$e \wedge (d \vee f) = (e \wedge d) \vee (e \wedge f)$
$e \wedge g = b \vee a$
$b = b$



13.

a) Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ reticulado distributivo

Seja $\mathcal{S} = (S; \wedge', \vee')$ sub-reticulado de $\mathcal{R}$

Queremos demonstrar que $\mathcal{S}$ é distributivo, ou seja:

qq $x, y, z \in S$

$$x \wedge' (y \vee' z) = (x \wedge' y) \vee' (x \wedge' z)$$

$\parallel \xleftarrow{\ \mathcal{S} \text{ é sub-reticulado}\ } \xrightarrow{} \parallel$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$\uparrow$ R é distributivo

20.

a) Provar duas implicações:

distributivo $\boxed{\Rightarrow}$ $(a \vee c = b \vee c$ e $a \wedge c = b \wedge c) \Rightarrow a = b$

$\boxed{\Leftarrow}$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ reticulado

Se R é distributivo então,

qq $a, b, c \in R$, $a \vee c = b \vee c$ e $a \wedge c = b \wedge c \Rightarrow a = b$

Dem. Sup R é distributivo

Sejam $a, b, c \in R$ tais que

i) $a \vee c = b \vee c$

ii) $a \wedge c = b \wedge c$

Falta ver que $a = b$.

De i) segue que $a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c)$

(pela absorção) $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a = (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$ (por ii))

$a = (a \vee c) \wedge b$

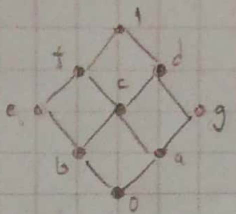
$a = (b \vee c) \wedge b$ (por i))

$a = b$ // (pela absorção)

$\boxed{\Leftarrow}$

Folha 4

21. $(A, \leq)$



$A = \{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}$ — OBS: $(A, \leq)$ é um reticulado

$B = \{0, a, b, c, d, f, 1\}$ — OBS: $(B, \leq|_B)$ é um reticulado

$O = \{\underline{\wedge}, \underline{\vee}, \underline{\delta}, \underline{0}, \underline{1}\}$

aridade resp. 2,2,1,0,0

$\mathcal{A} = (A; F)$ $\qquad \underline{\wedge}^{\mathcal{A}} = \inf$ em A $\quad \underline{\vee}^{\mathcal{A}} = \sup$ em $\mathcal{A}$

$\mathcal{B} = (B; G)$ $\qquad \underline{\wedge}^{\mathcal{B}} = \inf$ em B $\quad \underline{\vee}^{\mathcal{B}} = \sup$ em B

ambas de tipo (O, τ) $\qquad \underline{0}^{\mathcal{A}} = 0 \quad \underline{1}^{\mathcal{A}} = 1 \quad \underline{0}^{\mathcal{B}} = 0 \quad \underline{1}^{\mathcal{B}} = 1$

A: 33; 23

a)

i) $(A; \underline{\wedge}^{\mathcal{A}})$

ii) $(A; \underline{\wedge}^{\mathcal{A}}, \underline{\vee}^{\mathcal{A}})$

b)

i) Não. Porque o vazio não contém as constantes de A.

ii) Não. Não é fechado para as operações.

iii) É subuniverso de $\mathcal{A}$

c) Não é subálgebra porque $\delta^{B}(f) = b \neq d = \delta^{A}(f)$.

22.

a) I_a é fechado para $\vee$. Sejam $x, y \in I_a$. Queremos mostrar que $x \vee y \in I_a$.

Ora $x \vee y \in I_a$ ssc $(x \vee y) \vee a) = a$.

Mas $(x \vee y) \vee a = x \vee (y \vee a) \underset{y \in I_a}{=} x \vee a \underset{x \in I_a}{=} a$

Logo $x \vee y \in I_a$

b) I_a é fechado para $\wedge$. Sejam $x, y \in I_a$. Queremos mostrar que $x \wedge y \in I_a$, ou seja, $(x \wedge y) \vee a = a$.

$\boxed{\begin{array}{c} a, b \in R \\ a \vee b = a \\ \text{ssc} \\ a \wedge b = b \end{array}}$ para qualquer reticulado

Ora $(x \wedge y) \vee a = a$ ssc $(x \wedge y) \wedge a = x \wedge y$. Mas $(x \wedge y) \wedge a = (x \wedge a) \wedge y =$

$= x \wedge y$

$x \in I_a$
$x \vee a = a$
$x \wedge a = x$

23.

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

n	$-n$
0	3
1	2
2	1
3	0

$\left.\begin{array}{l} - \emptyset \in sub(A) \\ - A \in sub(A) \end{array}\right\}$ únicos subuniversos de A

$X \in sub(A)$ e $X \neq \emptyset$

a) $0 \in X \Rightarrow 3 \in X \Rightarrow 2 \in X \Rightarrow 1 \in X \Rightarrow X = A$
b) $1 \in X \Rightarrow 2 \in X \Rightarrow 0 \in X \Rightarrow 3 \in X \Rightarrow X = A$
c) $2 \in X \Rightarrow 1 \in X \Rightarrow 3 \in X \Rightarrow 0 \in X \Rightarrow X = A$
d) $3 \in X \Rightarrow 0 \in X \Rightarrow 2 \in X \Rightarrow 1 \in X \Rightarrow X = A$

Logo $X = A$

24.

a) Basta tomar $(\mathbb{N}_0, +)$. É uma subálgebra mas não é um grupo, porque não existe simétrico para cada elemento.

b) $(A ; \cdot)$ grupo finito $(A$ finito$)$
$\rightarrow$ 1 elto neutro de $\cdot$
$\rightarrow$ qq $a \in A$ existe a^{-1} tq $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$

Se $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ então $\mathcal{B} = (B ; \cdot)$ é grupo finito.

Dem: Seja $\mathcal{B} = (B; \cdot)$ tq $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$. Seja $b \in B$.

a) qq $n \in \mathbb{N}$, $b^n \in B$ (pq B é subuniverso)
b) existem n, k tais que $b^{n+k} = b^n$ (pq B é finito)

falta provar isto $\rightarrow$ $\Downarrow$

$b^{-1} \in B \quad 1 \in B$

Exemplo: $\mathcal{A} = (\mathbb{Z} ; +)$

$\emptyset \in sub(\mathcal{A})$
$\mathbb{Z} \in sub(\mathcal{A})$

$\frac{28}{34}$

Folha 5

28. 1) $\nabla_A = \{\{a,b,c,d\}\}$ ✓

2) $\{\{a,b,c\},\{d\}\}$ ✓

3) $\{\{a,b,d\},\{c\}\}$ $a\,\theta\, b$ mas $f(a)=c \not\theta\, b = f(b)$

4) $\{\{a,c,d\},\{b\}\}$ ✓

5) $\{\{c,b,d\},\{a\}\}$ $c\,\theta\, d$ mas $f(c)=a \not\theta\, d = f(d)$

6) $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ $a\,\theta\, b$ mas $f(a)=c \not\theta\, b = f(b)$

7) $\{\{a,c\},\{b,d\}\}$ ✓

8) $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$ $a\,\theta\, d$ mas $f(a)=c \not\theta\, d = f(d)$

9) $\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$ $a\,\theta\, b$ mas $f(a)=c \not\theta\, b = f(b)$

10) $\{\{a,c\},\{b\},\{d\}\}$ ✓

11) $\{\{a,d\},\{c\},\{b\}\}$ $a\,\theta\, d$ mas $f(a)=c \not\theta\, d = f(d)$

12) $\{\{b,c\},\{a\},\{d\}\}$ $b\,\theta\, c$ mas $f(b)=b \not\theta\, a = f(c)$

13) $\{\{b,d\},\{a\},\{c\}\}$ ✓

14) $\{\{c,d\},\{a\},\{b\}\}$ $c\,\theta\, d$ mas $f(c)=a \not\theta\, d = f(d)$

15) $\Delta_A = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$ ✓

34.

a) $\theta_1, \theta_2 \in Eq(A) \not\Rightarrow \theta_1 \cup \theta_2 \in Eq(A)$
$\theta_1, \theta_2 \in Eq(A) \not\Rightarrow \theta_2 \circ \theta_1 \in Eq(A)$

Contra-exemplos: $A = \{a,b,c\}$

θ_1 $\{\{a\},\{b,c\}\}$
θ_2 $\{\{a,b\},\{c\}\}$

- $\theta = \theta_1 \cup \theta_2$ $a\,\theta\, b$ e $b\,\theta\, c$ mas $a \not\theta\, c$

Logo θ não é transitiva

- $\theta = \theta_2 \circ \theta_1 = \{(x,y) \in A^2 \mid \exists z \in A, (x,z) \in \theta_1, (z,y) \in \theta_2\}$

temos $c\,\theta\, a$ mas $a \not\theta\, c$. Logo θ não é simétrica.

11

30. $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$, $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathcal{R}$

$a, b, c \in R$, $a \leq c \leq b$ e $(a,b) \in \theta$ $\Rightarrow$ $(a,c) \in \theta$ e $(b,c) \in \theta$

Rel. Congruência
$\mathcal{A} = (A; F)$
$\theta \subseteq A \times A$
θ relação de equivalência
θ sat. prop. de substituição

Queremos provar
$$\frac{\begin{array}{c} a_1 \,\theta\, b_1 \\ a_2 \,\theta\, b_2 \end{array}}{\begin{array}{l} \wedge \quad a_1 \wedge a_2 \;\theta\; b_1 \wedge b_2 \\ \vee \quad a_1 \vee a_2 \;\theta\; b_1 \vee b_2 \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} a \,\theta\, b \\ c \,\theta\, c \end{array}}{\begin{array}{l} a = a \wedge c \;\theta\; b \wedge c = c \\ c = a \vee c \;\theta\; b \vee c = b \end{array}}$$

Logo $a \,\theta\, c$ e $c \,\theta\, b$

Por palavras bonitas

Como $a \,\theta\, b$ e $c \,\theta\, c$, segue, pela propriedade de substituição, que $a \wedge c \;\theta\; b \wedge c$
Ora $a \wedge c = a$ pq $a \leq c$ e $b \wedge c = c$, pq $c \leq b$. Logo $a \,\theta\, c$

(Fazer parecido para provar $b \,\theta\, c$)

29.

a) $\theta(a, 0)$

Rel. Congruência em reticulados
$\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ reticulado
$\theta \in Eq(A)$
θ é congruência em $\mathcal{R}$ sse
1) cada classe de eq é subreti
2) cada classe de eq é convexa
3) cada classe de eq. é fechada para quadriláteros

A menor relação $\theta' \in Eq(\mathcal{R})$ tq $a \,\theta'\, 0$

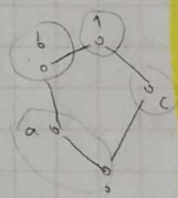
relação identidade

$\theta' = \Delta_R \cup \{(a,0), (0,a)\}$

esta relação de eq. determina esta partição

$R/\theta' = \{ [x]_{\theta'} \mid x \in R \}$

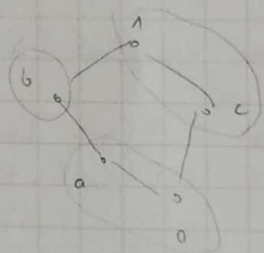
$= \{ \{a, 0\}, \{b\}, \{c\}, \{1\} \}$



ainda não é uma congruência porque $a \wedge c = 0$ $a \vee c = 1$ e $a \,\theta\, c$ mas $1 \not\theta\, c$

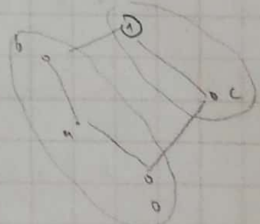
$\theta'' = \theta' \cup \{(c, 1), (1, c)\}$

1, c, b, 0 não satisfaz a (3) prop.



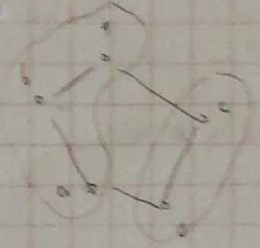
$\theta''' = \theta'' \cup \{(b,0), (0,b), (a,b), (b,a)\}$

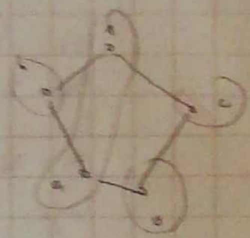
verifica todas as propriedades,
Logo é uma congruência.



b) $\theta(a,1)$

θ_1 a menor relação de eq. q contém $(a,1)$

$\theta =$ 



31. $\mathcal{S} = (S; \cdot)$ semi-reticulado

- assoc, com., idemp.

⟶ θ_a é reflexiva:

Seja $b \in S$. Queremos dem q $(b,b) \in \theta_a$.

Ora $(b,b) \in \theta_a$ sse $[(a \leq b \text{ e } a \leq b) \text{ ou } (a \not\leq b \text{ e } a \not\leq b)]$

sse $a \leq b$ ou $a \not\leq b$

sse $\underbrace{a \cdot b = a \text{ ou } a \cdot b \neq a}_{V}$

Logo $(b,b) \in \theta_a$

⟶ θ_a é simétrica:

TPC

⟶ θ_a é transitiva:

Sup $(b,c) \in \theta_a$ e $(c,d) \in \theta_a$

Queremos dem que $(b,d) \in \theta_a$, ou seja, $(a \leq b \text{ e } a \leq d)$ ou $(a \not\leq b \text{ e } a \not\leq d)$

Por hipótese: I) $(a \leq b \text{ e } a \leq c)$ ou $(a \not\leq b \text{ e } a \not\leq c)$

II) $(a \leq c \text{ e } a \leq d)$ ou $(a \not\leq c \text{ e } a \not\leq d)$

Por I), temos 2 casos:

i) $(a \leq b)$ e $(a \leq c)$, por II, temos $a \leq d$

Então temos $(a \leq b \text{ e } a \leq d)$, em particular e a tese verifica-se

ii) $(a \not\leq b \text{ e } a \not\leq c)$, por II, temos $a \not\leq d$

Então, em particular temos $(a \not\leq b \text{ e } a \not\leq d)$, e a tese verifica-se

⟶ Propriedade de substituição

TPC

34.

a) Contra-exemplos: $A = \{a,b,c\}$

$\theta_1 \ \{\{a\}, \{b,c\}\}$

$\theta_2 \ \{\{a,b\}, \{c\}\}$

$\theta = \theta_1 \cup \theta_2 \quad a\,\theta\, b \ \text{ e } \ b\,\theta\, c \ \text{ mas } \ a \not\theta\, c$

Logo θ não é transitiva.

$\theta = \theta_2 \circ \theta_1$

$= \{(x,y) \in A^2 \mid \exists z \in A : (x,z) \in \theta_1, (z,y) \in \theta_2\}$

$c\,\theta\, a \ \text{ mas } \ a \not\theta\, c$