TESTE K

TEORIA DE LINGUAGENS

Licenciatura em Ciências de Computação

18 de Abril de 2007 — duração 2 horas

Responda às seguintes questões justificando cuidadosamente:

1. Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$ e a linguagem S definida por:

   i. $\varepsilon \in S$;
   ii. se $w \in S$, então $wb \in S$;
   iii. se $w \in S$, então $bw \in S$;
   iv. se $w \in S$, então $awa \in S$;
   v. se w_1, $w_2 \in S$, então $w_1 w_2 \in S$.

   (a) Verifique se a^2bab^3a, $ab^4(ab)^2 \in S$.
   (b) Verifique se a definição de S é determinista.
   (c) Mostre, por indução estrutural, que se $u \in S$, então $|u|_a$ é par.
   (d) Mostre que $S = \{u \in A^* \ : \ |u|_a \text{ é par } \}$.

2. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ e a linguagem

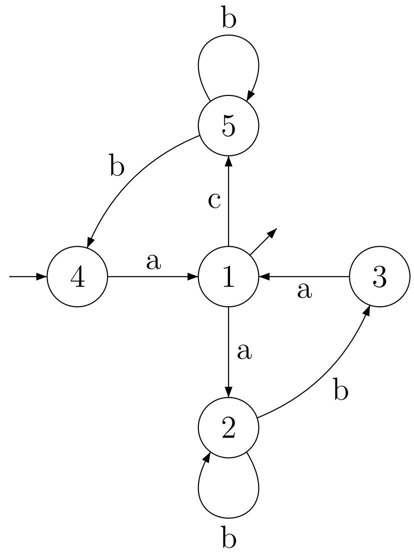
$$L = \{x \in A^* \ : \ |x|_c = |x|_a + |x|_b\}$$

   (a) Diga quais das palavras seguintes são elementos de L: $ababc^2$, cab^2cbc^2, $c^4a^2b^2, (ab)^3c^8a^2$.
   (b) Verifique que L não é uma linguagem regular.

3. Considere a linguagem L_p sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ constituída pelas palavras de prefixo ab e sufixo bca.

   (a) Verifique se ab^3ca, $abca, bcabcabca^2b \in L_p$.
   (b) Determine uma expressão regular que represente L_p.
   (c) Responda apenas a uma das seguintes questões, sabendo que a cotação de (ii) é metade da cotação de (i):
      (i) Determine um autómato determinista e completo que reconhece L_p. Justifique a resposta.
      (ii) Determine um autómato que reconhece L_p. Justifique a resposta.

4. Considere o autómato $\mathcal{A}$ sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ que admite a seguinte representação gráfica:



   (a) Indique palavras u_1 e u_2 reconhecidas pelo autómato $\mathcal{A}$ que admitem como factor $v_1 = aba^2$ e $v_2 = bacb^3$, respectivamente.

   (b) Classifique o autómato.

   (c) Determine um autómato minimal equivalente a $\mathcal{A}$.

   (d) Calcule $L(\mathcal{A})$ recorrendo à resolução de um sistema de equações lineares.

   (e) Determine um autómato que reconhece a linguagem $L(\mathcal{A})(b^2(a+c)^*)^*$.

5. Sejam A um alfabeto, $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, F)$ um autómato determinista completo e acessível e $\sim$ a relação binária definida em Q por,

$$\forall q_0, q_1 \in Q,\ q_0 \sim q_1 \text{ se e só se } \forall u \in A^* \ \delta(q_0, u) \in F \Leftrightarrow \delta(q_1, u) \in F.$$

   Mostre que:

   (a) para $u \in A^*$, se u é reconhecida por $\mathcal{A}$, então u é reconhecida por $\mathcal{A}/\sim$.

   (b) para $u, v \in A^*$, $u \sim_{L(\mathcal{A})} v$ se e só se $\delta(i, u) \sim \delta(i, v)$.
   (Recordar que, para $L \subseteq A^*$ e $u, v \in A^*$, $u \sim_L v$ se e só se $uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$, para todo $z \in A^*$)

COTAÇÃO:

1a)1	b)1	c)1.5	d)1.5	
2a)0.5	b)1.5			
3a)0.5	b)1.5	c)i-2 (ii-1)		
4a)0.75	b)1	c)2.5	d)1.5	e)1.25
5a)1	b)1			

FIM

TESTE L

TEORIA DE LINGUAGENS

Licenciatura em Ciências de Computação

18 de Abril de 2007 duração 2 horas

Responda às seguintes questões justificando cuidadosamente:

1. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ e a linguagem S definida por:

   i. $\varepsilon \in S$;
   ii. se $w \in S$, então $wb \in S$;
   iii. se $w \in S$, então $wc \in S$;
   iv. se $w \in S$, então $awa \in S$;
   v. se w_1, $w_2 \in S$, então $w_1 w_2 \in S$.

   (a) Verifique se $ca^2b^2cab^3a$, $a^2b^2c^2a^2bc \in S$.
   (b) Verifique se a definição de S é determinista.
   (c) Mostre, por indução estrutural, que se $u \in S$, então $|u|_a$ é par.
   (d) Mostre que $S = \{u \in A^* \,:\, |u|_a \text{ é par }\}$.

2. Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$ e a linguagem

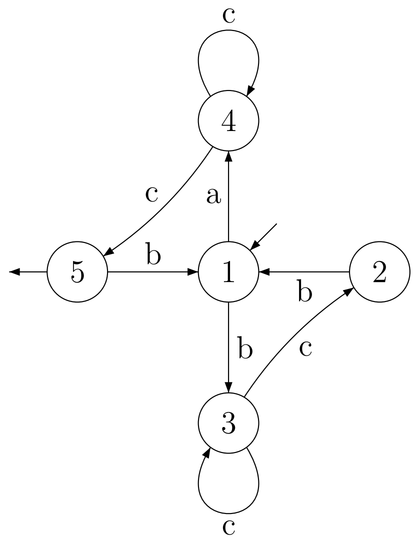
$$L = \{x \in A^* \,:\, |x|_b = |x|_a + 3\}$$

   (a) Diga quais das palavras seguintes são elementos de L: aba^2ba^2, $ab^2ab^3c^2$, a^3b^6, $(ab)^3b^2ab^2$.
   (b) Verifique que L não é uma linguagem regular.

3. Considere a linguagem L_p sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ constituída pelas palavras de prefixo ca e sufixo cab.

   (a) Verifique se cab^3ca, $cab, cac^2abcab \in L_p$.
   (b) Determine uma expressão regular que represente L_p.
   (c) Responda apenas a uma das seguintes questões, sabendo que a cotação de (ii) é metade da cotação de (i):
      (i) Determine um autómato determinista, acessível e co-acessível que reconhece L_p. Justifique a resposta.
      (ii) Determine um autómato que reconhece L_p. Justifique a resposta.

4. Considere o autómato $\mathcal{A}$ sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ que admite a seguinte representação gráfica:



(a) Indique palavras u_1 e u_2 reconhecidas pelo autómato $\mathcal{A}$ que admitem como factor $v_1 = bcb^2$ e $v_2 = bac^2b$, respectivamente.

(b) Classifique o autómato.

(c) Determine um autómato minimal equivalente a $\mathcal{A}$.

(d) Calcule $L(\mathcal{A})$ recorrendo à resolução de um sistema de equações lineares.

(e) Determine um autómato que reconhece a linguagem $L(\mathcal{A})((a+c)^*b^2)^*$.

5. Sejam A um alfabeto, $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, F)$ um autómato determinista completo e acessível e $\sim$ a relação binária definida em Q por,

$$\forall q_0, q_1 \in Q,\ q_0 \sim q_1 \text{ se e só se } \forall u \in A^*\ \delta(q_0, u) \in F \Leftrightarrow \delta(q_1, u) \in F.$$

Mostre que:

(a) para $u \in A^*$, se u é reconhecida por $\mathcal{A}$, então u é reconhecida por $\mathcal{A}/\sim$.

(b) para $u, v \in A^*$, $u \sim_{L(\mathcal{A})} v$ se e só se $\delta(i, u) \sim \delta(i, v)$.
(Recordar que, para $L \subseteq A^*$ e $u, v \in A^*$, $u \sim_L v$ se e só se $uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$, para todo $z \in A^*$)

COTAÇÃO:

1a)1	b)1	c)1.5	d)1.5	
2a)0.5	b)1.5			
3a)0.5	b)1.5	c)i-2 (ii-1)		
4a)0.75	b)1	c)2.5	d)1.5	e)1.25
5a)1	b)1			

FIM

TESTE P

TEORIA DE LINGUAGENS

Licenciatura em Ciências de Computação

18 de Abril de 2007 — duração 2 horas

Responda às seguintes questões justificando cuidadosamente:

1. Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$ e a linguagem S definida por:

   i. $\varepsilon \in S$;
   ii. se $w \in S$, então $aw \in S$;
   iii. se $w \in S$, então $bwb \in S$;
   iv. se w_1, $w_2 \in S$, então $w_1 w_2 \in S$.

   (a) Verifique se a^2bab^3a, $ab^4(ab)^3 \in S$.

   (b) Verifique se a definição de S é determinista.

   (c) Mostre, por indução estrutural, que se $u \in S$, então $|u|_b$ é par.

   (d) Mostre que $S = \{u \in A^* \ : \ |u|_b \text{ é par } \}$.

2. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ e a linguagem

$$L = \{x \in A^* \ : \ |x|_c = |x|_a + |x|_b\}$$

   (a) Diga quais das palavras seguintes são elementos de L: $ababc^2$, cab^2cbc^2, $c^4a^2b^2$, $(ab)^3c^8a^2$.

   (b) Verifique que L não é uma linguagem regular.

3. Considere a linguagem L_p sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ constituída pelas palavras de prefixo ab e sufixo bca.

   (a) Verifique se ab^3ca, $abca, bcababca^2b \in L_p$.

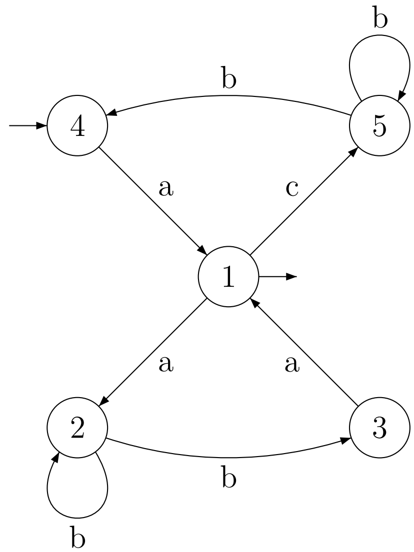
   (b) Determine uma expressão regular que represente L_p.

   (c) Responda apenas a uma das seguintes questões, sabendo que a cotação de (ii) é metade da cotação de (i):

      (i) Determine um autómato determinista e completo que reconhece L_p. Justifique a resposta.

      (ii) Determine um autómato que reconhece L_p. Justifique a resposta.

4. Considere o autómato $\mathcal{A}$ sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ que admite a seguinte representação gráfica:



(a) Indique palavras u_1 e u_2 reconhecidas pelo autómato $\mathcal{A}$ que admitem como factor $v_1 = aba^2$ e $v_2 = bacb^3$, respectivamente.

(b) Classifique o autómato.

(c) Determine um autómato minimal equivalente a $\mathcal{A}$.

(d) Calcule $L(\mathcal{A})$ recorrendo à resolução de um sistema de equações lineares.

(e) Determine um autómato que reconhece a linguagem $L(\mathcal{A})(b^2(a+c)^*)^*$.

5. Sejam A um alfabeto, $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, F)$ um autómato determinista completo e acessível e $\sim$ a relação binária definida em Q por,

$$\forall q_0, q_1 \in Q,\ q_0 \sim q_1 \text{ se e só se } \forall u \in A^* \ \delta(q_0, u) \in F \Leftrightarrow \delta(q_1, u) \in F.$$

Mostre que:

(a) para $u \in A^*$, se u é reconhecida por $\mathcal{A}$, então u é reconhecida por $\mathcal{A}/\sim$.

(b) para $u, v \in A^*$, $u \sim_{L(\mathcal{A})} v$ se e só se $\delta(i, u) \sim \delta(i, v)$.
(Recordar que, para $L \subseteq A^*$ e $u, v \in A^*$, $u \sim_L v$ se e só se $uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$, para todo $z \in A^*$)

COTAÇÃO:

1a)1	b)1	c)1.5	d)1.5	
2a)0.5	b)1.5			
3a)0.5	b)1.5	c)i-2 (ii-1)		
4a)0.75	b)1	c)2.5	d)1.5	e)1.25
5a)1	b)1			

FIM

TESTE Q

TEORIA DE LINGUAGENS

Licenciatura em Ciências de Computação

18 de Abril de 2007 duração 2 horas

Responda às seguintes questões justificando cuidadosamente:

1. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ e a linguagem S definida por:

   i. $\varepsilon \in S$;
   ii. se $w \in S$, então $wa \in S$;
   iii. se $w \in S$, então $wb \in S$;
   iv. se $w \in S$, então $cwc \in S$;
   v. se $w_1, w_2 \in S$, então $w_1 w_2 \in S$.

   (a) Verifique se $ca^2b^2cab^3a$, $a^2b^2c^2a^2bc \in S$.

   (b) Verifique se a definição de S é determinista.

   (c) Mostre, por indução estrutural, que se $u \in S$, então $|u|_c$ é par.

   (d) Mostre que $S = \{u \in A^* : |u|_c \text{ é par }\}$.

2. Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$ e a linguagem

$$L = \{x \in A^* \ : \ |x|_b = |x|_a + 3\}$$

   (a) Diga quais das palavras seguintes são elementos de L: aba^2ba^2, $ab^2ab^3c^2$, a^3b^6, $(ab)^3b^2ab^2$.

   (b) Verifique que L não é uma linguagem regular.

3. Considere a linguagem L_p sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ constituída pelas palavras de prefixo ca e sufixo cab.

   (a) Verifique se cab^3ca, $cab, cac^2abcab \in L_p$.

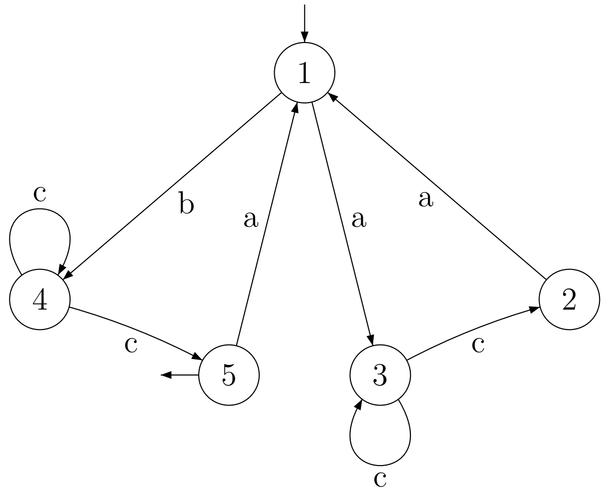
   (b) Determine uma expressão regular que represente L_p.

   (c) Responda apenas a uma das seguintes questões, sabendo que a cotação de (ii) é metade da cotação de (i):

      (i) Determine um autómato determinista, acessível e co-acessível que reconhece L_p. Justifique a resposta.

      (ii) Determine um autómato que reconhece L_p. Justifique a resposta.

4. Considere o autómato $\mathcal{A}$ sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ que admite a seguinte representação gráfica:



(a) Indique palavras u_1 e u_2 reconhecidas pelo autómato $\mathcal{A}$ que admitem como factor $v_1 = aca^2$ e $v_2 = abc^2a$, respectivamente.

(b) Classifique o autómato.

(c) Determine um autómato minimal equivalente a $\mathcal{A}$.

(d) Calcule $L(\mathcal{A})$ recorrendo à resolução de um sistema de equações lineares.

(e) Determine um autómato que reconhece a linguagem $L(\mathcal{A})((b+c)^*a^2)^*$.

5. Sejam A um alfabeto, $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, F)$ um autómato determinista completo e acessível e $\sim$ a relação binária definida em Q por,

$$\forall q_0, q_1 \in Q,\ q_0 \sim q_1 \text{ se e só se } \forall u \in A^*\ \delta(q_0, u) \in F \Leftrightarrow \delta(q_1, u) \in F.$$

Mostre que:

(a) para $u \in A^*$, se u é reconhecida por $\mathcal{A}$, então u é reconhecida por $\mathcal{A}/\sim$.

(b) para $u, v \in A^*$, $u \sim_{L(\mathcal{A})} v$ se e só se $\delta(i, u) \sim \delta(i, v)$.
(Recordar que, para $L \subseteq A^*$ e $u, v \in A^*$, $u \sim_L v$ se e só se $uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$, para todo $z \in A^*$)

COTAÇÃO:

1a)1	b)1	c)1.5	d)1.5	
2a)0.5	b)1.5			
3a)0.5	b)1.5	c)i-2 (ii-1)		
4a)0.75	b)1	c)2.5	d)1.5	e)1.25
5a)1	b)1			

FIM

TESTE

TEORIA DE LINGUAGENS

Licenciatura em Ciências de Computação

18 de Abril de 2007 duração 2 horas

Responda às seguintes questões justificando cuidadosamente:

1. Comente a seguinte argumentação que pretende justificar que 'sendo X um conjunto finito de cardinal $n \geq 1$ e Y um conjunto não vazio, toda a função $f : X \longrightarrow Y$ é constante':

   Para $|X| = 1$ a afirmação é verdadeira pois $|Im\, f| = 1$.

   Seja $n \in \mathbb{N}$. Admitindo por hipótese de indução que, se o domínio de uma função tem cardinal finito n então a função é constante, seja X tal que $|X| = n+1$ e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Como $X \neq \emptyset$, seja $a \in X$ e $X_a = X \setminus \{a\}$. Então $|X_a| = n$ e a restrição de f a X_a é uma função cujo domínio tem cardinal n, pelo que, por hipótese de indução, a restrição de f a X_a é constante, digamos existe $c \in Y$ tal que

$$\begin{array}{cccc} f_{|X_a}: & \mathbb{X}_a & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & c \end{array}$$

   Seja b outro elemento de X e $X_b = X \setminus \{b\}$. Então $|X_b| = n$ e a restrição de f a X_b é uma função cujo domínio tem cardinal n, pelo que, novamente por hipótese de indução, a restrição de f a X_b é constante, pelo que a imagem por f de todos os elementos de X_b será necessariamente c, em particular $f(a) = c$. Logo $f : X \longrightarrow Y$ é a função constante igual a c.

   Então, pelo princípio de indução matemática toda a função $f : X \longrightarrow Y$ de domínio finito é constante.

2. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ e a linguagem S definida por:

   i. $a \in S$;
   ii. se $w \in S$, então $wb \in S$;
   iii. se $w \in S$, então $wc \in S$;
   iv. se $w \in S$, então $awa \in S$;
   v. se $w_1,\ w_2 \in S$, então $w_1 w_2 \in S$.

   (a) Verifique se $ca^2b^2cab^3a,\ a^2b^2c^2a^2bc \in S$.
   (b) Verifique se a definição de S é determinista.
   (c) Mostre, por indução estrutural, que se $u \in S$, então $|u|_a$ é ímpar.
   (d) Verifique que $S \neq \{u \in A^* \ :\ |u|_a \text{ é ímpar}\}$.

3. Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$ e a linguagem $L = \{x \in A^* \ :\ x = x^I\}$.

   (a) Diga quais das palavras seguintes são elementos de L: $(ab)^2b^3(ba)^2,\ ab^3a^2b^3a,\ a^2bab^2a^2ba$.
   (b) Verifique que L não é uma linguagem regular.

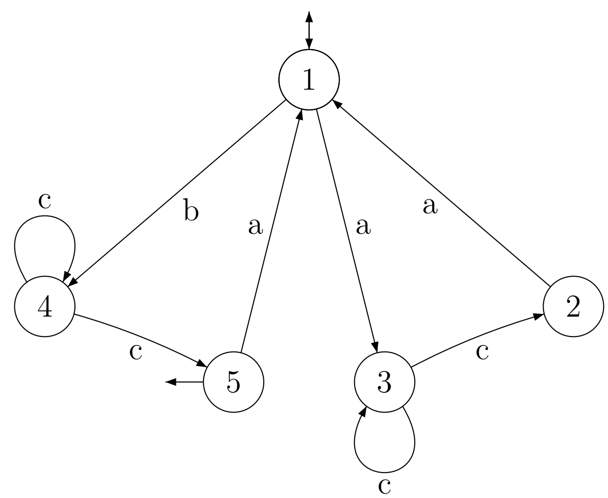
4. Considere a linguagem L_p sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ constituída pelas palavras $u \in A^*$ que não admitem ca como factor e, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $|u| = 2n$.

   (a) Verifique se c^2ab^3, $baba^2cb, c^2abc^2a^2bc \in L_p$.

   (b) Determine um autómato que reconhece L_p. Justifique a resposta.

   (c) Determine uma expressão regular que represente L_p.

5. Considere o autómato $\mathcal{A}$ sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ que admite a seguinte representação gráfica:



   (a) Indique palavras u_1 e u_2 reconhecidas pelo autómato $\mathcal{A}$ que admitem como factor $v_1 = aca^2$ e $v_2 = abc^2a$, respectivamente.

   (b) Classifique o autómato.

   (c) Determine um autómato minimal equivalente a $\mathcal{A}$.

   (d) Calcule $L(\mathcal{A})$ recorrendo à resolução de um sistema de equações lineares.

   (e) Determine um autómato que reconhece a linguagem $((b + c)^*a^2)^*L(\mathcal{A})$.

6. Sejam A um alfabeto, $\mathcal{A} = (Q, A, E, \{i\}, F)$ um autómato determinista completo e acessível e $\sim$ a relação binária definida em Q por,

$$\forall q_0, q_1 \in Q,\ q_0 \sim q_1 \text{ se e só se } \forall u \in A^*\ \delta(q_0, u) \in F \Leftrightarrow \delta(q_1, u) \in F.$$

   Mostre que:

   (a) Mostre que $\mathcal{A}/\sim$ é determinista completo e acessível.

   (b) para $u, v \in A^*$, $u \sim_{L(\mathcal{A})} v$ se e só se $\delta(i, u) \sim \delta(i, v)$.
   (Recordar que, para $L \subseteq A^*$ e $u, v \in A^*$, $u \sim_L v$ se e só se $uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$, para todo $z \in A^*$)

COTAÇÃO:

1)1
2a)1 b)1 c)1.5 d)0.5
3a)0.5 b)1.5
4a)0.5 b)2 c)1.5
5a)0.75 b)1 c)2.5 d)1.5 e)1.25
6a)1 b)1

FIM