1 Linguagens Formais e Expressões Regulares

1.1 Seja $A = \{a, b\}$. Determine o número de palavras sobre A tais que:

a) o comprimento é 3;
b) o comprimento é no máximo 3;
c) o comprimento não excede um dado número natural m.

1.2 Responda ao exercício anterior assumindo que A é um alfabeto com n letras.

1.3 Seja $A = \{a, b\}$. Para cada um dos seguintes conjuntos de palavras, dê exemplos de elementos e apresente uma sua caracterização alternativa.

a) $\{u \in A^* : |u| \in \mathbb{N}\}$
b) $\{u \in A^* : |u| = |u|_a\}$
c) $\{u \in A^* : u = u^2\}$
d) $\{u \in A^* : |u|_a + |u|_b < 10\}$

1.4 Sejam A um alfabeto, $x, y, z \in A^*$ e $a \in A$. Prove por indução em palavras que:

a) $x.\epsilon = x = \epsilon.x$;
b) $|x.y|_a = |x|_a + |y|_a$;
c) $x.(y.z) = (x.y).z$.

1.5 Sejam A um alfabeto e $x, y, z \in A^*$. Prove por indução no comprimento de palavras que:

a) $x.y = x.z \Rightarrow y = z$;
b) $y.x = z.x \Rightarrow y = z$.

1.6 Sejam A um alfabeto, $u \in A^*$ e $n, m \in \mathbb{N}_0$. Prove que:

a) $|u^n| = n|u|$;
b) $u^n.u^m = u^{n+m}$;
c) $(u^n)^m = u^{n\times m}$.

1.7 Sejam A um alfabeto e $x, y \in A^*$. Prove que:

a) $|x^I| = |x|$;
b) $(x^I)^I = x$;
c) $(x.y)^I = y^I.x^I$.

1.8 Sejam A um alfabeto e $x \in A^*$. Prove que, para qualquer fator y de x, existe um prefixo w de x e existe um sufixo z de x tais que $x = w.y.z$.

1.9 Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$ e a condição $P(x)$, sobre palavras em A, dada por:

$$|x|_a > |x|_b \Longrightarrow \exists u, v \in A^* : x = uav \wedge |u|_a = |u|_b.$$

a) Verifique que $P(x)$ é verdadeira para $x \in \{baaab, baaa, baa, aab\}$.

b) Mostre que $P(x)$ é verdadeira, para todo $x \in A^*$, usando indução no comprimento de palavras.

1.10 Seja $A = \{a, b\}$. Dê uma caracterização indutiva de cada uma das seguintes linguagens sobre A.

a) $\{a^n : n \in \mathbb{N}_0\}$

b) A^+

c) $\{u \in A^* : bb \text{ é sufixo de } u\}$

d) $\{a^n b^m : n, m \in \mathbb{N} \wedge n > m\}$

1.11 Cada uma das alíneas seguintes define indutivamente uma linguagem L sobre $A = \{a, b\}$. Apresente uma caracterização não indutiva de cada uma destas linguagens.

a) 1. $a \in L$ 2. $x \in L \Rightarrow bx \in L$ 3. $x \in L \Rightarrow xb \in L$

b) 1. $a \in L$ 2. $x \in L \Rightarrow bx \in L$ 3. $x \in L \Rightarrow xb \in L$ 4. $x \in L \Rightarrow xa \in L$

c) 1. $a \in L$ 2. $b \in L$ 3. $x \in L$ e $y \in L \Rightarrow xay \in L$ 4. $x \in L$ e $y \in L \Rightarrow xby \in L$

1.12 Sejam $A = \{a, b\}$ e L a linguagem sobre A definida indutivamente pelas regras que se seguem.

1. $a \in L$ 2. $x \in L \Rightarrow xa \in L$ 3. $x \in L \Rightarrow xb \in L$

a) Prove que $ababa \in L$ e que $baba \notin L$.

b) Enuncie o Princípio de indução para L.

c) Prove que, para qualquer $x \in L$, existe $y \in A^*$ tal que $x = ay$.

d) Prove que $L = \{ay : y \in A^*\}$.

1.13 Sejam $A = \{0, 1\}$ e L a linguagem sobre A definida indutivamente pelas regras que se seguem.

1. $\epsilon \in L$ 2. $x \in L$ e $y \in L \Rightarrow 0x1y \in L$ 3. $x \in L$ e $y \in L \Rightarrow 1x0y \in L$

a) Determine $\{u \in L : |u| \leq 4\}$.

b) Enuncie o Princípio de indução para L.

c) Prove que, para qualquer $x \in L$, $|x|$ é par.

d) Apresente uma caracterização de L que não seja indutiva e prove que, de facto, a caracterização apresentada corresponde a L.

1.14 Seja $A = \{0, 1\}$ e sejam $L_1 = \{\epsilon, 1, 01\}$ e $L_2 = \{\epsilon, 0, 10\}$. Determine as seguintes linguagens sobre A: $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \backslash L_2$, $L_1.L_2$, $L_2.L_1$, $0L_1$ e $L_1 0 L_2$.

1.15 Sejam A um alfabeto e $L, L_1, L_2 \subseteq A^*$. Mostre que:

a) se $L_1 \subseteq L_2$, então $LL_1 \subseteq LL_2$ e $L_1L \subseteq L_2L$;

b) pode ter-se $LL_1 \subseteq LL_2$ e $L_1L \subseteq L_2L$ e $L_1 \not\subseteq L_2$;

c) se $L_1 \neq \emptyset$, então $L_1 \subseteq L_1L_2$ se e só se $\epsilon \in L_2$.

1.16 Seja $A = \{0, 1\}$ e seja L a linguagem sobre A dada por $\{1^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$. Determine:

a) L^0, L^1 e L^2;

b) L^+ e L^*.

1.17 Seja A o alfabeto $\{0, 1\}$. Dê exemplos de linguagens L_1 e L_2 sobre A de tal modo que:

a) L_1 seja uma linguagem finita e $L_1^* = A^*$;

b) L_2 seja uma linguagem infinita e $L_2 \neq L_2^*$.

1.18 Sejam A um alfabeto e L uma linguagem sobre A. Mostre que $L = L^*$ se e só se são satisfeitas as seguintes condições:

i) $\epsilon \in L$; **ii)** para todo $u, v \in L$, $uv \in L$.

1.19 Sejam A um alfabeto e L uma linguagem sobre A. Mostre que:

a) para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$, $L^nL^m = L^{n+m}$;

b) $L^*L^* = L^*$;

c) para todo $n \in \mathbb{N}$, $(L^*)^n = L^*$;

d) $(L^*)^* = L^*$.

1.20 Sejam A um alfabeto e L, L_1, L_2 linguagens sobre A. Mostre que:

a) $(L_1 \cup L_2)^I = L_1^I \cup L_2^I$;

b) $(L_1L_2)^I = L_2^I L_1^I$;

c) para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $(L^n)^I = (L^I)^n$;

d) $(L^*)^I = (L^I)^*$.

1.21 Seja $A = \{0,1\}$. Para cada uma das seguintes palavras u, sobre o alfabeto $A \cup \{\emptyset, \epsilon, (,), +, \cdot, {}^*\}$, indique: i) se $u \in \mathrm{ER}(A)$ e ii) se u abrevia um elemento de $\mathrm{ER}(A)$ (de acordo com as convenções estabelecidas), indicando um elemento de $\mathrm{ER}(A)$ abreviado por u.

a) $(\epsilon.1)$ **b)** $(0.)$ **c)** $({}^*0)$ **d)** $\emptyset^*\emptyset$ **e)** 10^3 **f)** $01^* + \epsilon + 10^+$

1.22 Para cada uma das seguintes expressões regulares r, sobre o alfabeto $\{a,b,c\}$, determine $\mathcal{L}(r)$.

a) $abc\epsilon$ **b)** $a(b+\emptyset c)$
c) ab^*c **d)** $(a+b)^n a$ (com $n \in \mathbb{N}_0$)
e) $a(a+b+c)^+(b+c)$ **f)** $(a+b+c)^*aa(a+b+c)^*$

1.23 Dê exemplos de palavras de "comprimento mínimo", sobre o alfabeto $\{0,1\}$, que não pertençam à linguagem representada por cada uma das seguintes expressões regulares:

a) $\epsilon + (0^* + 1^*)(0^* + 1^*)$; **b)** $1^*(01)^*0^*$; **c)** $0^*(100^*)^*1^*$.

1.24 Prove que cada uma das seguintes linguagens sobre o alfabeto $\{a,b,c\}$ é regular.

a) O conjunto das palavras que têm, pelo menos, uma ocorrência de b ou de c.
b) O conjunto das palavras de comprimento ímpar.
c) O conjunto das palavras nas quais, pelo menos, uma das letras não ocorre.

1.25 Sejam A um alfabeto e $r, r_1, r_2, s, s_1, s_2 \in \mathrm{ER}(A)$. Prove que:

a) $r \leq r^*$; **b)** $r \leq s \Rightarrow r^* \leq s^*$;
c) $r_1 \leq s_1 \text{ e } r_2 \leq s_2 \Rightarrow r_1 + r_2 \leq s_1 + s_2$; **d)** $r_1 \leq s_1 \text{ e } r_2 \leq s_2 \Rightarrow r_1 r_2 \leq s_1 s_2$;
e) $r_1 \leq s \text{ e } r_2 \leq s \Rightarrow r_1 + r_2 \leq s$; **f)** $r_1 \leq s^* \text{ e } r_2 \leq s^* \Rightarrow r_1 r_2 \leq s^*$.

1.26 Seja A um alfabeto e sejam $r, s \in \mathrm{ER}(A)$. Prove que:

a) $r^* = r^*r^*$; **b)** $r^* = (r^*)^*$; **c)** $(r+s)^* = (r^* + s^*s)^* = (r^*s^*)^*$.

1.27 Prove que, dadas expressões regulares r e s sobre um alfabeto A, as seguintes igualdades não são necessariamente válidas:

a) $(r+s)^* = r^* + s^*$; **b)** $(rs)^* = r^*s^*$.

1.28 Prove que o conjunto das linguagens regulares sobre um alfabeto é fechado para as operações de *união*, *concatenação*, e *fecho de Kleene*.

1.29 Para cada uma das seguintes equações lineares à direita, indique soluções alternativas em $ER(\{a,b\})$, se possível, e determine uma solução mínima em $ER(\{a,b\})$.

a) $X_1 = aX_1 + a + \epsilon$; **b)** $X_2 = (b+a)X_2 + a^*$; **c)** $Y = (ab)^*Y + a + b$.

1.30 Utilize sistemas de equações para encontrar expressões regulares que provem que cada uma das seguintes linguagens sobre o alfabeto $\{a,b,c\}$ é regular:

a) o conjunto das palavras onde o número de ocorrências de a é par;
b) o conjunto das palavras em que não ocorre o fator abc;
c) o conjunto das palavras nas quais o fator ab ocorre exatamente uma vez e c não ocorre.

2 Autómatos Finitos

2.1 Considere o autómato $\mathcal{A} = (\{0,1,2\}, \{a,b\}, \delta, 0, \{2\})$ em que a função transição δ é dada pela tabela que se segue.

δ	0	1	2
a	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
b	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$

a) Represente o autómato $\mathcal{A}$ através de um grafo.

b) Para $q \in \{0,1,2\}$ e $u \in \{\epsilon, a, b, ab, ba, aab, abb\}$, determine $\delta(q,u)$.

c) Dê exemplo de palavras u de comprimento 2 tais que:

i) u é etiqueta de caminho com origem 1 e destino 2;

ii) uba é etiqueta de caminho bem sucedido;

iii) não há caminhos com origem 0 e etiqueta ua;

iv) $0 \xrightarrow{abu} 2$;

v) au é aceite por $\mathcal{A}$;

vi) au é rejeitada por $\mathcal{A}$.

d) Mostre que:

i) $\forall u \in \{a,b\}^*.\, 1 \in \delta(0, au)$;

ii) $\forall n \in \mathbb{N}.\, 2 \in \delta(1, a^n)$;

e) Mostre que, para todo $u \in \{a,b\}^*, n \in \mathbb{N}$, a palavra aua^n é reconhecida por $\mathcal{A}$.

f) Mostre que:

i) $\forall x \in \{a,b\}^*.\ 0 \xrightarrow{x} 1 \implies \exists u \in \{a,b\}^*.\, x = au$;

ii) $\forall x \in \{a,b\}^*.\ 0 \xrightarrow{x} 2 \implies \exists u \in \{a,b\}^*, n \in \mathbb{N}.\, x = aua^n$.

g) Indique $L(\mathcal{A})$ e prove a sua afirmação.

2.2 Considere o autómato $\mathcal{A} = (\{0,1,2\}, \{a,b\}, \delta, 0, \{2\})$ em que a função transição δ é dada pela tabela que se segue.

δ	0	1	2
a	$\{0\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
b	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$

a) Represente o autómato $\mathcal{A}$ através de um grafo.

b) Indique se $\mathcal{A}$ é: i) determinista; ii) completo; iii) acessível; iv) co-acessível.

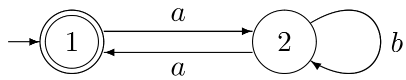
c) Dê exemplos de palavras aceites por $\mathcal{A}$ e de palavras rejeitadas por $\mathcal{A}$.

d) Descreva a linguagem reconhecida por $\mathcal{A}$ e prove a sua afirmação.

Univ. Minho | LCC/LMAT
Dep. Matemática | **Autómatos e Linguagens Formais** | 2022/2023

Exercícios | Folha 6

2.3 Considere o autómato $\mathcal{A} = (\{Q, \{a, b\}, \delta, i, F)$ representado pelo seguinte grafo.



a) Explicite Q, δ, i e F.

b) Dê exemplos de palavras aceites por $\mathcal{A}$ e de palavras rejeitadas por $\mathcal{A}$.

c) Mostre que para qualquer $u \in \{a, b\}^*$ que seja não vazia e aceite por $\mathcal{A}$, existe $v \in \{a, b\}^*$ tal que $u = ava$.

d) Descreva a linguagem reconhecida por $\mathcal{A}$.

e) Classifique o autómato em relação a determinismo e a completude.

2.4 Seja $A = \{a, b\}$. Prove que é reconhecível por autómatos finitos a linguagem constituída por todas as palavras em que:

a) ocorre o fator aa;

b) não ocorre o fator aa;

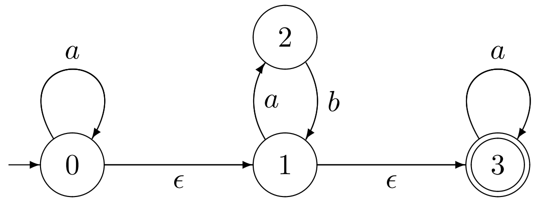
c) têm um número ímpar de ocorrências de a;

d) cada ocorrência de a é precedida de uma ocorrência de b.

2.5 Para cada uma das linguagens dos dois exercícios anteriores, indique um autómato determinista e acessível que a reconheça.

2.6 Considere uma máquina de venda de café que aceita moedas de 10, 20 e 50 cêntimos, custando cada café 50 cêntimos e sendo as moedas depositadas sequencialmente. Quando a quantia depositada atinge ou excede os 50 cêntimos, a máquina fornece um café, mas não devolve troco. Construa um autómato que simule o funcionamento desta máquina.

2.7 Seja $\mathcal{A}$ o autómato com transições-ϵ e alfabeto $\{a, b\}$, dado pelo seguinte grafo:



a) Calcule o fecho-ϵ de cada um dos estados de $\mathcal{A}$.

b) Para cada $u \in \{a, b\}^*$ tal que $|u| \leq 2$, indique todos os caminhos com origem 0 e etiqueta u e diga se u é aceite por $\mathcal{A}$.

c) Prove que $\mathcal{A}$ aceita todas as palavras da linguagem $\mathcal{L}((ab)^*)$.

d) Indique uma expressão regular r tal que $L(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(r)$.

e) Construa um autómato sem transições vazias que reconheça $L(\mathcal{A})$.

2.8 Seja $A = \{a, b\}$. Prove que as linguagens associadas às seguintes expressões regulares sobre A são reconhecíveis por autómatos com transições vazias:

a) $aa + ab^*$; **b)** $(aa + ab^*)^*$; **c)** $(aa + ab^*)^*bb$.

2.9 Sejam A um alfabeto, r e s expressões regulares sobre A e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ autómatos com transições vazias e alfabeto A, que reconheçam $\mathcal{L}(r)$ e $\mathcal{L}(s)$ respectivamente. Construa autómatos com transições vazias para reconhecer cada uma das seguintes linguagens:

a) $\mathcal{L}(r^* + s)$;

b) $\mathcal{L}((rs)^*)$.

2.10 Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$. Para cada cada um dos autómatos $\mathcal{A}$ considerado no Exercício 2.4, determine uma expressão regular r tal que $\mathcal{L}(r) = L(\mathcal{A})$, recorrendo ao método das equações lineares.

2.11 Seja $A = \{a, b\}$ seja L_0 a linguagem sobre A constituída pelas palavras que não têm prefixo aa.

a) Construa um autómato que reconheça L_0.

b) A partir do autómato construído na alínea anterior e recorrendo ao método das equações lineares, obtenha uma expressão regular r tal que $\mathcal{L}(r) = L_0$.

c) Para cada expressão regular r abaixo apresentada, justifique se $\mathcal{L}(r) = L_0$.

i) $b^*ab^+(a + b)^* + \epsilon$

ii) $(\epsilon + a)(\epsilon + b)(a + b)^*$

iii) $(\epsilon + a)(\epsilon + b(a + b)^*)$

2.12 Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$, a linguagem L_0 constituída pelas palavras que começam por a e considere ainda o autómato com transições-ϵ $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3\}, A, \delta, 1, \{3\})$ onde δ é dada por:

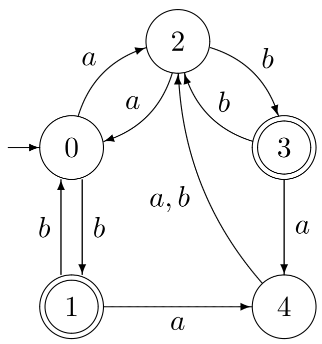
δ	a	b	ϵ
1	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\{3\}$	$\{1\}$
3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$

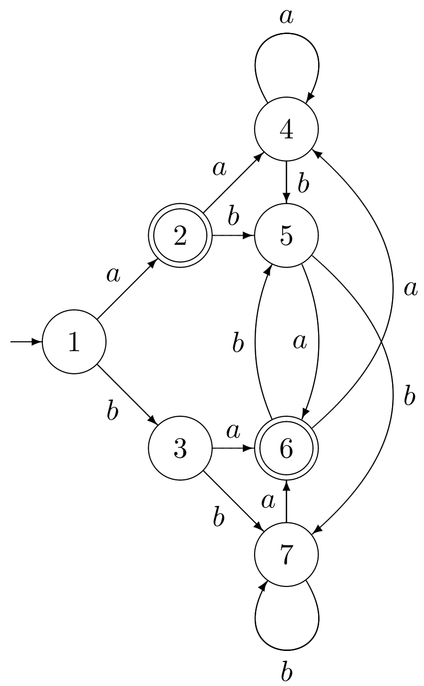
Para cada uma das linguagens que se segue, indique um autómato que a reconheça e indique uma expressão regular que lhe esteja associada

a) $L(\mathcal{A}) \cup L_0$

b) $(L(\mathcal{A})L_0)^*$

2.13 Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$ e os autómatos deterministas completos e acessíveis que se seguem.





Para cada um dos autómatos:

a) dê exemplo de estados distintos que sejam equivalentes e dê exemplo de estados que não sejam equivalentes;

b) para cada $k \in \mathbb{N}_0$, indique o conjunto quociente para a relação $\sim_k$;

c) indique o conjunto quociente para a relação $\sim$;

d) construa o seu autómato quociente (para a relação $\sim$).

2.14 Construa autómatos minimais que reconheçam cada uma das linguagens consideradas no Exercício 2.12.

2.15 Seja $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ um autómato determinista, completo e acessível. Prove que:

a) a relação $\sim$ e as relações $\sim_k$, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, são relações de equivalência.

b) para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$, $\sim_{k+1} \subseteq \sim_k$.

c) para quaisquer $q, q' \in Q$, $q \sim q'$ se e só se para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$ $q \sim_k q'$.

2.16 Prove que se L é uma linguagem (sobre um alfabeto finito) que é infinita e reconhecível por autómatos finitos, então existem $j \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que, para cada $i \in \mathbb{N}_0$, L contém palavras de comprimento $j + ki$.

2.17 Mostre que as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ não são regulares.

a) $\{a^n b^m : n, m \in \mathbb{N}_0 \wedge n < m\}$

b) $\{u \in A^* : u = u^I\}$

c) $\{a^p : p \text{ é primo}\}$ (sugestão: utilize o exercício anterior)

3 Gramáticas

3.1 Seja $G = (\{S, B\}, \{a, b\}, S, P)$ a gramática com produções

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aSb \mid B \\ B & \to & bB \mid b \end{array}$$

a) Determine os elementos de $\{\alpha \in \{S, B, a, b\}^* : S \stackrel{2}{\Rightarrow} \alpha\}$.

b) Determine os elementos de $\{\alpha \in \{a, b\}^* : S \stackrel{k}{\Rightarrow} \alpha \wedge k \leq 3\}$.

c) Prove que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $B \stackrel{n}{\Rightarrow} b^n$.

d) Dê exemplos de palavras que pertençam à linguagem gerada por G e de palavras que não pertençam à linguagem gerada por G.

e) Prove que para qualquer $u \in L(G)$, existem $m, n \in \mathbb{N}_0$ tais que $m < n$ e $u = a^m b^n$.

f) Prove que a linguagem gerada por G é $\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}_0 \wedge m < n\}$.

3.2 Considere o alfabeto $A = \{(,)\}$ e a gramática $G = (\{S\}, A, S, P)$, com produções

$$S \to SS \mid (S) \mid \epsilon$$

a) Indique derivações da palavra $(())()$ a partir de S que tenham comprimentos diferentes.

b) Determine os elementos de $\{u \in L(G) : |u| = 6\}$.

c) Prove que para qualquer $u \in L(G)$, $|u|_(= |u|_)$.

d) Justifique se $L(G) = \{u \in A^* : |u|_(= |u|_)\}$.

e) Seja $G' = (\{S\}, A, S, P')$ a gramática com produções

$$S \to (S)S \mid \epsilon$$

Prove que $L(G) = L(G')$.

3.3 De entre as seguintes gramáticas, indique as equivalentes.

$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, S, P_1)$

$$S \to aS \mid Sa \mid b$$

$G_3 = (\{S\}, \{a, b\}, S, P_3)$

$$S \to aS \mid ab$$

$G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P_2)$

$$\begin{array}{rcl} S & \to & AB \mid BA \\ A & \to & a \mid aA \\ aB & \to & ab \end{array}$$

$G_4 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P_4)$

$$\begin{array}{rcl} S & \to & AB \mid BA \\ A & \to & a \mid aA \\ B & \to & b \end{array}$$

3.4 Considere as gramáticas seguintes.

$$G_1 = (\{S\}, \{a,b\}, S, P_1) \qquad\qquad G_2 = (\{S\}, \{a,b\}, S, P_2)$$
$$S \;\rightarrow\; aS \mid bS \mid a \qquad\qquad S \;\rightarrow\; aSa \mid bSb \mid \epsilon$$

$$G_3 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P_3)$$
$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & ABC \\ A & \rightarrow & a \mid aA \\ aB & \rightarrow & ab \\ bC & \rightarrow & bc \end{array}$$

a) Para cada gramática G acima e para cada gramática G do exercício anterior, diga se G é uma gramática independente de contexto e se G é uma gramática linear à esquerda ou à direita.

b) Para cada gramática G acima, determine a linguagem gerada por G.

3.5 Para cada uma das linguagens geradas pelas gramáticas do exercício anterior,

a) construa, se possível, uma gramática regular que gere a linguagem;

b) construa, se possível, um autómato finito que reconheça a linguagem.

3.6 Apresente gramáticas para gerar as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$.

a) A linguagem das palavras que têm aa como fator.

b) A linguagem das palavras que não têm aa como fator.

c) $\{u \in A^* : |u|_a = |u|_b\}$

d) $\{u \in A^* : |u|_a = 2|u|_b\}$

e) $\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}_0 \wedge m < n\}$

f) $\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}_0 \wedge m < n\}^*$

g) $\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}_0 \wedge m < n\}\{a\}^*$

3.7 Para cada gramática G considerada nos exercícios 3.1 a 3.4, que seja independente de contexto:

a) se possível, apresente derivações distintas de elementos de $L(G)$;

b) construa as árvores de derivação determinadas pelas derivações indicadas na alínea anterior;

c) de entre as derivações indicadas na alínea **a**), diga se existem derivações essencialmente iguais;

d) diga se G é ambígua;

e) apresente uma gramática equivalente a G que seja não ambígua.

4 Autómatos de Pilha

4.1 Considere o autómato de pilha $E = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \{z,a\}, \delta, 1, z, \{3\})$ tal que

$$\begin{array}{ll} \delta(1,b,z) = \{(1,bz)\}, & \delta(2,a,b) = \{(2,\epsilon)\}, \\ \delta(1,b,b) = \{(1,bb)\}, & \delta(2,a,z) = \{(2,z)\}, \\ \delta(1,a,z) = \{(2,z)\}, & \delta(2,\epsilon,z) = \{(3,z)\}, \\ \delta(1,a,b) = \{(2,\epsilon)\}, & \emptyset \quad \text{nos restantes casos,} \end{array}$$

e que reconhece palavras utilizando o critério dos estados finais.

a) Determine todas as configurações que podem ser computadas a partir das configurações $(1, aab, z)$ e $(1, baa, z)$.

b) Justifique se $aab \in L(E)$ e se $baa \in L(E)$.

c) Mostre que:

i) E reconhece a^n, para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii) E reconhece bba^n, para todo $n \geq 2$.

d) Descreva a linguagem $L(E)$ reconhecida pelo autómato.

e) Observe que, considerando o critério da pilha vazia, a linguagem reconhecida por E é a linguagem vazia e indique um autómato de pilha que use o critério da pilha vazia e reconheça a mesma linguagem que E.

4.2 A tabela de transição seguinte diz respeito a um autómato de pilha com estado inicial 1, símbolo inicial da pilha z e estado final 2 (que utiliza o critério dos estados finais). Determine a linguagem (regular) reconhecida pelo autómato.

Estado	Entrada	Símbolo da pilha	Movimento(s)
1	a	z	$(2,z)$
1	b	z	$(1,z)$
2	a	z	$(2,z)$
2	b	z	$(2,z)$
Todas as outras combinações:			nenhum

4.3 Indique tabelas de transição para autómatos de pilha que reconheçam cada uma das linguagens seguintes, descrevendo sucintamente as respetivas estratégias.

a) $L_1 = \{a^n u : u \in A^* \wedge |u| \leq n\}$ sobre o alfabeto $A = \{a,b\}$;

b) $L_2 = \{a^i b^j c^k : \exists i,j,k \in \mathbb{N} \,.\, j = i + k\}$ sobre o alfabeto $\{a,b,c\}$.

4.4 Considere a GIC G do exercício 3.2, nomeadamente, $G = (\{S\}, \{(,)\}, S, P)$ com produções: $S \to SS \mid (S) \mid \epsilon$.

a) Construa um autómato de pilha que reconheça $L(G)$. (Sugestão: recorde a demonstração da proposição que estabelece que a linguagem gerada por uma GIC é reconhecível por um autómato de pilha.)

b) Mostre que $u = ()()$ é reconhecida pelo autómato indicado na alínea **a)**.