AUTÓMATOS E LINGUAGENS FORMAIS

Lic. Ciências da Computação
Lic. Matemática

Exercícios - Linguagens

---

1. Defina indutivamente:
   (a) o conjunto das palavras sobre o alfabeto $A = \{0, 1\}$ que começam por 0;
   (b) o conjunto das palavras sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ que têm um número de ocorrências de a's igual ao número de ocorrências de b's;
   (c) o conjunto $\{a^i b^j \mid 0 < i < j\}$ onde a e b são letras;
   (d) o conjunto $\{a^i c b^j \mid i = j + 1, j \in \mathbb{N}_0\}$, sendo $A = \{a, b, c\}$ o alfabeto;
   (e) o conjunto das palavras w sobre $\{a, b, c\}$ tais que $w = w^I$;
   (f) o conjunto T das palavras sobre $\{0, 1\}$ que têm a palavra 00 como fator;
   (g) o conjunto U das palavras sobre $\{0, 1\}$ que não têm a palavra 001 como fator.

2. Sejam A um alfabeto e $u, v \in A^*$. Mostre que:
   (a) $|uv| = |u| + |v|$ (sugestão: por indução sobre $|v|$);
   (b) $|u^n| = n\,|u|$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$;
   (c) $\left|u^I\right| = |u|$.

3. Sejam $A = \{a, b, c\}$ um conjunto com três elementos e $L \subseteq A^*$ uma linguagem definida indutivamente por:
   (i) $c \in L$;
   (ii) se $w \in L$ então $abwb \in L$;
   (iii) se $w \in L$ então $cw \in L$ e $wc \in L$.

   (a) Mostre que $2|w|_a = |w|_b$ para todo o $w \in L$.
   (b) Verifique que nem todas as palavras que têm a propriedade referida em 3a são elementos de L.

4. Sejam $k, n \in \mathbb{N}$ e A um alfabeto. Considere a relação binária $pref$ definida por: para $u, v \in A^*$,

$$u \; pref \; v \Leftrightarrow u \text{ é um prefixo de } v.$$

   (a) Mostre que a relação $pref$ é uma relação de ordem parcial em A^*.
   (b) Sejam $u, v, w \in A^*$. Mostre que:
   (b1) se $u \; pref \; v$, então $|u| \leq |v|$;
   (b2) se $u \; pref \; v$ e $w \; pref \; v$, então $u \; pref \; w$ ou $w \; pref \; u$.

5. Sejam $A = \{a, b\}$, $L = \{u \in A^* \mid |u| \text{ é par}\}$ e K a linguagem definida indutivamente pelas regras seguintes:

   (i) $\varepsilon \in K$;
   (ii) Se $w \in K$ e $a_1, a_2 \in A$, então $a_1 w a_2 \in K$.

   (a) Mostre que $aabb \in K$ e $baaaba \in K$.
   (b) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para K.
   (c) Mostre que $K \subseteq L$.
   (d) Prove que $K = L$.

6. Em cada uma das alíneas seguintes define-se indutivamente um conjunto L de palavras sobre $A = \{a, b\}$. Em cada caso dê uma definição explícita para L.

   (a) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então xa, $xb \in L$.
   (b) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então bx, $xb \in L$.
   (c) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então ax, $xb \in L$.
   (d) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então $xb, xa, bx \in L$.
   (e) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então $xb, ax, bx \in L$.
   (f) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então $xb, xba \in L$.
   (g) (i) $\varepsilon \in L$, $b \in L$, $bb \in L$; (ii) se $x \in L$, então $xa, xab, xabb \in L$.
   (h) (i) $\varepsilon \in L$; (ii) se $x \in L$, então, caso $x = yb$, para $y \in A^*$, $xa \in L$, senão $xb \in L$.

7. Sejam $k, n \in \mathbb{N}$ e A um alfabeto com k letras.

   (a) Determine o número de palavras sobre A de comprimento 4.
   (b) Determine o número de palavras sobre A de comprimento não superior a 4.
   (c) Indique, mais geralmente, o número de palavras sobre A de comprimento não superior a n.

8. Sejam A um alfabeto, $a, b \in A$ e $u \in A^*$. Mostre que se $au = ub$ então $a = b$ e $u \in \{a\}^*$.

9. Seja $X = \{aa, bb\}$ e $Y = \{\varepsilon, b, ab\}$.

   (a) Indique as palavras do conjunto XY.
   (b) Indique as palavras do conjunto Y^* de comprimento não superior a 3.
   (c) Quantas palavras de comprimento 6 existem em X^*.

10. Sejam $A = \{a, b\}$, $X = \{a, ab\}$ e $Y = \{\varepsilon, bab, ab\}$.

    (a) Dê exemplos de palavras dos conjuntos Y^+ e Y^* e constate que $Y^+ = Y^*$.
    (b) Determine X^0 e X^3.
    (c) Calcule X^+ e X^*.
    (d) Determine $L = abb(Y^2 \cup X)$.
    (e) Determine $(ab)^{-1}L$ e $(ab)^{-1}Y^2$.

11. Sejam $A = \{a, b\}$ e $L = A^*abaA^*$.
    (a) Determine L^2 e L^*.
    (b) Calcule $a^{-1}L$, $b^{-1}L$, $(aa)^{-1}L$, $(ba)^{-1}L$, $(ab)^{-1}L$ e $(abab)^{-1}L$.

12. Sejam L, L_1 e L_2 linguagens sobre um alfabeto A. Mostre que:
    (a) $L(L_1 \cup L_2) = LL_1 \cup LL_2$.
    (b) $L(L_1 \cap L_2) \neq LL_1 \cap LL_2$.

13. Seja A um alfabeto e sejam $L, L_1, L_2 \subseteq A^*$. Mostre que:
    (a) se $L_1 \subseteq L_2$, então $LL_1 \subseteq LL_2$ e $L_1L \subseteq L_2L$.
    (b) pode ter-se $LL_1 \subseteq LL_2$, $L_1L \subseteq L_2L$ e $L_1 \nsubseteq L_2$.

14. Sejam A um alfabeto, L uma linguagem sobre A e $u, v, w \in A^*$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
    (a) $uv = uw \Rightarrow v = w$; (b) $vu = wu \Rightarrow v = w$.
    (c) $\varepsilon L = L\varepsilon = L$; (d) $\varnothing L = \varnothing$;
    (e) $L\varnothing = L$; (f) $L = L^1$;
    (g) $L^+ = L^*L$; (h) $\varnothing^+ = \varnothing$;
    (i) $\varnothing^* = \{\varepsilon\}$; (j) $\varepsilon \in L^+$, $\forall L$;
    (k) $L^+ \cup \{\varepsilon\} = L^*$; (l) $L^+ \neq L^*$, $\forall L$;
    (m) $L^+ \subseteq L^*$; (n) $L^* \subseteq L^+$.

15. Seja L uma linguagem sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ tal que $\varepsilon \notin L$. Para cada uma das afirmações seguintes, diga se a afirmação é verdadeira ou falsa.
    (a) $L \setminus aA^* = L \cap bA^*$.
    (b) $L^*A^* \subseteq (LA)^*$.

16. Sejam $A = \{a, b\}$ e L uma linguagem sobre A definida indutivamente por:
    (i) $a \in L$;
    (ii) se $x \in L$, então $xb, xba \in L$.
    De entre as seguintes afirmações, selecione as afirmações verdadeiras.
    a) $a^{-1}L^* = A^*$; b) $L^+ = A^*$; c)$L^* = A^*$; d)$b^{-1}L^* = L^*$.

17. Sejam $A = \{a, b\}$ e L uma linguagem sobre A definida indutivamente por:
    (i) $\varepsilon \in L$;
    (ii) se $x \in L$, então xba, $xaa \in L$.
    De entre as seguintes afirmações, selecione a afirmação verdadeira.
    a)$(ba)^{-1}L \neq L$; b)$a^{-1}L = aL$; c) $L \neq L^*$; d) $(bb)^{-1}L^* \neq \emptyset$.

Exercícios - Linguagens regulares

---

18. Descreva a linguagem representada por cada uma das seguintes expressões regulares sobre o alfabeto $\{0, 1\}$.
    (a) $0(0 + 1)^*1$;
    (b) $(\varepsilon + 0)^*$;
    (c) $0^*1^*0^*$;
    (d) $(0 + 1)^4 0(0 + 1)^*$.

19. Dê exemplos de palavras de comprimento mínimo sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$, que não pertencem à linguagem representada por cada uma das seguintes expressões regulares.
    (a) $\varepsilon + a^*(a + b + c)^*(b + c)$;
    (b) $a^* + b^* + c^*$;
    (c) $a^*(ba)^*b^*$;
    (d) $a^*(b^* + c^*)a^*$.

20. Considere o alfabeto $D = \{0, 1, \ldots, 9\}$ e considere a linguagem N formada pelos números naturais. Mostre que é um conjunto regular.

21. Para cada linguagem descrita no exercício 6, indique uma expressão regular correspondente.

22. Sejam $A = \{a, b\}$ um alfabeto e $K \subseteq A^*$ uma linguagem definida por:
    (i) $\varepsilon \in K$;
    (ii) se $u \in K$ então abu, $ub^2 \in K$.

    (a) Verifique se ab^2a é fator de alguma palavra de K.
    (b) Escreva uma expressão regular $r \in ER(A)$ tal que a linguagem correspondente verifique $\mathcal{L}(r) = K$.

23. Prove que a expressão regular $(ab + b)^+$ representa a linguagem das palavras sobre A cuja última letra é b e aa não é fator.

24. Indique uma expressão regular representando o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, b\}$:
    (a) que têm pelo menos duas letras consecutivas iguais;
    (b) de comprimento par;
    (c) que não têm aba como fator;
    (d) que têm pelo menos duas ocorrências do fator aba;
    (e) que têm uma e uma só ocorrência do fator ab.

25. Indique uma expressão regular representando o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$:
    (a) que admitem como fator as palavras abc e cbb;

(b) que não têm *aba* como fator;

(c) cujas palavras inversas são elementos de $(ac)^*(a^2 + ba)^*c$.

26. Sejam A um alfabeto, $L \subseteq A^*$ e $L^I = \{x^I \mid x \in L\}$.

(a) Defina uma função que a cada expressão regular $e \in ER(A)$ faça corresponder uma expressão $e' \in ER(A)$, tal que $\mathcal{L}(e') = \mathcal{L}(e)^I$.

(b) Conclua que se L é uma linguagem regular, então L^I também é regular.

27. Seja $A = \{a, b, c\}$. Preencha os espaços entre as seguintes expressões regulares sobre A com um dos símbolos $=$, $\leq$ ou $\not\leq$:

(a) $a^* + b^*$_____$(a + b)^*$;

(b) $a(a + b)^*$_____$a(a^* + b)^*$;

(c) aa^*a_____a^*aaa^*;

(d) $a(a + b)^*a$_____$(a + b)^*aa(a + b)^*$;

(e) $a(b + c)^*$_____$(ab + ac)^*$;

(f) $(ab + ac)^*$_____$a^*(b + c)^*$;

(g) $c^*(ab + a)^*$_____$(a + ba + c)^*(b + \varepsilon)$;

(h) $(b^*ab^*ab^*)^*c(b^*ab^*ab^*)^*$_____$b^*(ab^*a)^*b^*cb^*(ab^*a)^*b^*$.

28. Sendo $A = \{a, b\}$ e $L = (aA^* \cap A^*b) \setminus (A^*aaA^* \cup A^*bbA^*)$, mostre que $L = \mathcal{L}((ab)^+)$.

29. Seja A um alfabeto.

(a) Prove que $\leq$ é uma relação de ordem parcial.

(b) Mostre que, para quaisquer $r, r_1, r_2, s, s_1, s_2 \in ER(A)$, se tem:

i. $r \leq r^*$;

ii. $r \leq r + s$;

iii. $r \leq s \Rightarrow r^* \leq s^*$;

iv. se $r_1 \leq s_1$ e $r_2 \leq s_2$, então $r_1 + r_2 \leq s_1 + s_2$;

v. se $r_1 \leq s_1$ e $r_2 \leq s_2$, então $r_1r_2 \leq s_1s_2$;

vi. $(r^+s)^* \leq (r^*s^*)^*$;

vii. se $r_1 \leq s$ e $r_2 \leq s$, então $r_1 + r_2 \leq s$;

viii. se $r_1 \leq s^*$ e $r_2 \leq s^*$, então $r_1r_2 \leq s^*$.

(c) Verifique se, para quaisquer $r, s \in ER(A)$, $(r^+s)^* = (r^*s^*)^*$.

30. Seja A um alfabeto e sejam $r, s \in ER(A)$. Mostre que:

(a) $r^* = (r^*)^*$;

(b) $r^* = r^*r^*$;

(c) $r(sr)^* = (rs)^*r$;

(d) $(r + s)^* = (r^* + s^*)^* = (r^*s)^*r^* = r^*(sr^*)^*$;

(e) $(r^*s)^* = \varepsilon + (r + s)^*s$;

(f) $(rs^*)^* = \varepsilon + r(r + s)^*$;

(g) $(r^* + s^*)^* = (r^*s^*)^*$.

31. Seja $A = \{a, b, c\}$. Verifique se são válidas as seguintes igualdades entre expressões regulares:

    (a) $a(b^* + a^*b) = a(b^* + a^+b)$,

    (b) $((ab)^*a)^* = (ab + a)^+ab + \varepsilon$,

    (c) $(ac(abc)^* + b)^* = ((a(cab)^*c)^* + b^*)^*$.

32. Seja $A = \{a, b, c\}$. Considere a expressão regular $r = ((ab)^*(a + c))^* \in ER(A)$.

    Diga qual das seguintes igualdades entre expressões regulares sobre o alfabeto A é verdadeira.

    (a) $r = (ab + c)^*(a + c) + \varepsilon$.

    (b) $r = (ab + a + c)^*(a + c) + \varepsilon$.

    (c) $r = ab(ab + a + c)^* + \varepsilon$.

    (d) $r = (ab + a + c)^*$.

33. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e L a linguagem sobre A constituída por todas as palavras w tais que acc e cca são fatores de w. Seja r uma expressão regular tal que a linguagem associada a r é $L(r) = L$. Qual das seguintes expressões é uma solução para r?

    (a) $r = (a+b+c)^*acc(a+b+c)^*cca(a+b+c)^* + (a+b+c)^*cca(a+b+c)^*acc(a+b+c)^*$.

    (b) $r = (a + b + c)^*acc(a + b + c)^*cca(a + b + c)^* + (a + b + c)^*acca(a + b + c)^* + (a + b + c)^*cca(a + b + c)^*acc(a + b + c)^* + (a + b + c)^*ccacc(a + b + c)^*$.

    (c) $r = acc(a + b + c)^*cca + (a + b + c)^*accca(a + b + c)^* + (a + b + c)^*acca(a + b + c)^* + cca(a + b + c)^*acc + (a + b + c)^*ccacc(a + b + c)^*$.

    (d) $r = (a+b+c)^*acc(a+b+c)^*cca(a+b+c)^* + (a+b+c)^*accca(a+b+c)^* + (a+b+c)^*acca(a+b+c)^* + (a+b+c)^*cca(a+b+c)*acc(a+b+c)^* + (a+b+c)^*ccacc(a+b+c)^*$.

34. Sejam A um alfabeto e $r, s, t \in ER(A)$ tais que $s \leq t$ e $\varepsilon \leq r$. Verifique que r^*t é solução da equação $X = rX + s$.

35. Seja $A = \{a, b\}$. Indique as soluções mínimas das seguintes equações lineares à direita sobre expressões regulares:

    (a) $X = (b^* + a)X + a + (ab)^*$;

    (b) $X = (ab)^*X + a$;

    (c) $X = babX + \emptyset$;

    (d) $X = \emptyset X + a^*$;

    (e) $X = \varepsilon X + a^*$;

    (f) $X = (ab^*)^*aX + ab$.

36. Em cada caso, indique a solução mínima do sistema equações lineares à direita sobre expressões regulares:

    (a) $\left\{\begin{array}{l} X_1 = bX_1 + a^*X_2 + a \\ X_2 = a^*X_1 + abX_2 + \varepsilon \end{array}\right.$;

    (b) $\left\{\begin{array}{l} X_1 = a^*X_1 + aX_2 + \varepsilon \\ X_2 = aX_1 + aaX_2 + \varepsilon \end{array}\right.$.

37. Seja (t_1, t_2) uma solução do seguinte sistema de equações lineares à direita sobre expressões regulares:

$$\begin{cases} X_1 &= bX_1 + aX_2 + \varepsilon \\ X_2 &= aX_1 + bX_2 \end{cases} .$$

De entre as quatro opções abaixo, diga qual é uma afirmação verdadeira:

(a) O sistema tem mais do que uma solução e um resultado possível para t_2 é $t_2 = b^*a(b + ab^*a)^*$.

(b) A solução do sistema é única e $t_1 = (b + ba)^*(b + \varepsilon)^*$.

(c) A solução do sistema é $((b + ab^*a)^*, b^*a(b + ab^*a)^*)$.

(d) Uma solução do sistema é $((b + ab^*a)^*, b^*a)$.

38. Seja (t_1, t_2, t_3) uma solução do seguinte sistema de equações lineares à direita sobre expressões regulares:

$$\begin{cases} X_1 &= bX_2 \\ X_2 &= aX_3 \\ X_3 &= aX_1 + bX_2 + b \end{cases} .$$

De entre as quatro opções abaixo, diga qual é uma afirmação verdadeira:

(a) Existem várias soluções e na solução mínima o resultado para t_1 é $t_1 = \varepsilon$.

(b) Um expressão possível para t_1 é $t_1 = ba(aba + ba)^*b$.

(c) A solução do sistema é única e $t_1 = ba(a + b)^+bab + bab$.

(d) A solução do sistema é única e $t_2 = ((ab)^+a)^*(ba)^+b$.

39. Considere a equação linear à esquerda sobre expressões regulares $X = Xr + s$ em que $r, s \in \mathcal{R}eg(A)$. Verifique sr^* é solução da equação.