Universidade do Minho
Dep. de Matemática

LCC
2020/2021

Lógica CC

2º Teste A | 18 de janeiro de 2021 — duração: 2 horas

Nome: ______________________ Número: __________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Existem fórmulas do Cálculo Proposicional φ e ψ tais que $\varphi \vee \psi, \varphi \to \psi \nvdash \psi$.	☐	☐
2.	Seja Γ um conjunto maximalmente consistente. Se $p_0 \leftrightarrow p_1 \in \Gamma$, então $p_0 \vee p_1 \in \Gamma$.	☐	☐
3.	Seja L um tipo de linguagem com um símbolo de relação unário R. Para quaisquer L-termo t e variável x, $(\exists x_0 \mathsf{R}(x_0) \wedge \exists x_1 \neg \mathsf{R}(x_1))[t/x] = \exists x_0 \mathsf{R}(x_0) \wedge \exists x_1 \neg \mathsf{R}(x_1)$.	☐	☐
4.	Sejam L um tipo de linguagem e φ uma L-fórmula. Para qualquer L-estrutura E, E é modelo de $\{\varphi\}$ ou E é modelo de $\{\neg\varphi\}$.	☐	☐
5.	Seja L o tipo de linguagem $(\{\mathsf{f}\}, \{\mathsf{R}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$ e $\mathcal{N}(\mathsf{R}) = 1$. Existem 216 L-estruturas cujo domínio é $\{1, 2, 3\}$.	☐	☐
6.	A L_{Arit}-fórmula $\forall x_0 (x_0 = 0 \vee \neg(x_0 = 0))$ é instância de tautologias.	☐	☐

Grupo II

Com exceção da questão 4, as respostas às questões deste grupo devem ser apresentadas nos espaços que se lhes seguem.

1. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{=, \mathsf{R}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(\mathsf{R}) = 2$.

   (a) Sem justificar, indique um L-termo t_1 que tenha exatamente quatro subtermos e indique um L-termo t_2 tal que $\mathrm{VAR}(t_2) = \{x_0\}$ e $x_0 \in \mathrm{VAR}(t_2[t_1/x_0])$.

   Resposta: $t_1 =$

   $t_2 =$

   (b) Sem justificar, indique uma L-fórmula φ com três subfórmulas tal que x_0 não seja substituível sem captura de variáveis por x_1 em φ.

   Resposta:

   (c) Sem justificar, indique uma forma normal prenexa que seja logicamente equivalente à L-fórmula $\neg \forall x_0 \mathsf{R}(x_0, \mathsf{c}) \vee \mathsf{R}(x_0, x_1)$.

   Resposta:

2. Considere o tipo de linguagem L da questão anterior. Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

$$\begin{array}{ll} \overline{\mathsf{c}} = 0; & \overline{=} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : z_1 = z_2\}; \\ \overline{\mathsf{f}} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{\mathsf{f}}(z_1, z_2) = z_1 \times z_2; & \overline{\mathsf{R}} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : z_1 < z_2\}. \end{array}$$

Seja a a atribuição em E tal que $a(x_i) = -i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

(a) Sem justificar, indique $\mathsf{f}(x_1, \mathsf{f}(x_2, x_3))[a]_E$.
Resposta:

(b) Seja φ a L-fórmula $\forall x_1(\neg(\mathsf{f}(x_1, x_2) = x_0) \to (\mathsf{R}(x_1, \mathsf{c}) \vee \mathsf{R}(\mathsf{c}, x_1)))$. Indique $\varphi[a]_E$. Justifique.
Resposta:

(c) Diga se a L-fórmula φ da alínea anterior é válida em E. Justifique.
Resposta:

(d) Sem justificar, indique uma L-fórmula válida em E que represente a afirmação: O quadrado de qualquer inteiro diferente de zero é igual ao quadrado de um outro inteiro.
Resposta:

3. Sejam φ uma fórmula do Cálculo Proposicional e Γ um conjunto de fórmulas do Cálculo Proposicional. Prove que, se não existem derivações em DNP de φ a partir de Γ, então φ não é um teorema de DNP.

Resposta:

4. Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ L-fórmulas, x uma variável e Γ um conjunto de L-sentenças. Prove que se $\Gamma \models \varphi$ e $\varphi \to \psi$ é universalmente válida, então $\Gamma \models \forall x \psi$.

Cotações	I	II.1	II.2	II.3	II.4
	6	1,75+1,5+1,5	1,5+1,75+1,5+1,5	1,5	1,5