

Lógica CC

2º Teste A | 18 de dezembro de 2019 ————— duração: 2 horas —————

nome: _____ número _____

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Para todo o tipo de linguagem com um símbolo de função unário f e um símbolo de relação binário R , qualquer variável é substituível sem captura de variáveis por $f(x_1)$ em $\forall x_1 R(x_0, x_1)$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Para todo o tipo de linguagem L que apenas contém uma constante e um símbolo de relação unário, existem 64 L -estruturas cujo domínio é $\{0, 1, 2, 3\}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Para todo o tipo de linguagem L , para toda a L -fórmula φ e para toda a L -estrutura E , $E \models \varphi$ ou $E \models \neg\varphi$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Para todo o tipo de linguagem L , para toda a L -fórmula φ e para toda a variável x , se φ é instância de $p_1 \vee p_2$, então φ não é universalmente válida. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Para todo o tipo de linguagem com símbolos de relação unários P e Q , $\exists x_1 \exists x_2 (P(x_1) \wedge Q(x_2))$ é uma forma normal prenexa, logicamente equivalente a $\exists x_1 P(x_1) \wedge \exists x_1 Q(x_1)$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Para todo o tipo de linguagem L com um símbolo de relação unário R , o conjunto $\{\exists x_0 R(x_0) \leftrightarrow \forall x_0 R(x_0), \neg R(x_0)\}$ é semanticamente consistente. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Grupo II

Nas questões 1(a), 2(a), 2(b), 2(c) e 2(d), apresente a sua resposta no espaço disponibilizado a seguir à questão.

- Seja L um tipo de linguagem cujo único símbolo de função é f , sendo f um símbolo binário.
 - Dê exemplo de um L -termo t_1 com três subtermos, de um L -termo t_2 com um subtermo e de uma variável x tais que $\text{VAR}(t_1[t_2/x]) \neq (\text{VAR}(t_1) \setminus \{x\}) \cup \text{VAR}(t_2)$. Justifique.

Resposta:

- Prove por indução que, no entanto, $\text{VAR}(t_1[t_2/x]) \subseteq (\text{VAR}(t_1) \setminus \{x\}) \cup \text{VAR}(t_2)$, para quaisquer L -termos t_1, t_2 e para qualquer variável x .

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{c, f\}, \{=, R\}, \mathcal{N})$, em que $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(R) = 2$. Seja $E = (\mathbb{N}_0, \bar{\cdot})$ a L -estrutura tal que:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= 1 & \bar{=} &= \{(m, n) \in \mathbb{N}_0^2 : m = n\} \\ \bar{f} : \mathbb{N}_0 &\rightarrow \mathbb{N}_0 \text{ tal que } \bar{f}(n) = n^2 & \bar{R} &= \{(m, n) \in \mathbb{N}_0^2 : m < n\} \end{aligned}$$

Seja a a atribuição em E tal que $a(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

- (a) Indique $f(f(x_2))[a]_E$. Justifique.

Resposta:

- (b) Indique $(\forall x_1(\neg(x_1 = x_0 \vee x_1 = c) \rightarrow R(x_1, f(x_1))))[a]_E$. Justifique.

Resposta:

- (c) Diga se a L -fórmula $(\forall x_1(\neg(x_1 = x_0 \vee x_1 = c) \rightarrow R(x_1, f(x_1))))$ é válida em E . Justifique.

Resposta:

- (d) Indique, sem justificar, uma L -fórmula válida em E que represente a afirmação: Há um número que é igual ao seu quadrado e é menor que todos os outros.

Resposta:

3. Seja L um tipo de linguagem com uma constante c e com os símbolos de relação unários R e Q . Construa uma derivação em DN que mostre: $\forall x_0(R(x_0) \rightarrow Q(x_0)), \neg Q(c) \vdash \exists x_1 \neg R(x_1)$.

4. Sejam L um tipo de linguagem, Γ um conjunto de L -sentenças, φ uma L -fórmula tal que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é semanticamente inconsistente e x uma variável. Prove que $\Gamma \models \neg \exists x \varphi$.

Cotações	I.	II.1.	II.2.	II.3.	II.4.
	6	2+2	1,5+2+1,5+1,5	2	1,5