Lógica CC

2º Teste A | 4 de janeiro de 2019 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ____________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

	V	F
1. Para todo o tipo de linguagem com um símbolo de função binário f um símbolo de relação binário R, qualquer variável é substituível sem captura de variáveis por $\mathsf{f}(x_2, x_3)$ em $\exists x_1 \mathsf{R}(x_0, x_1)$.	□	□
2. Para todo o tipo de linguagem L que apenas contém uma constante e um símbolo de relação binário, o número de L-estruturas cujo domínio é $\{0,1\}$ é 16.	□	□
3. Para todo o tipo de linguagem L, para toda a L-fórmula φ tal que $\mathrm{LIV}(\varphi) = \emptyset$ e para toda a L-estrutura E, se $E \models \varphi[a]$ para alguma atribuição a em E, então φ é válida em E.	□	□
4. Para todo o tipo de linguagem L, para toda a L-fórmula φ e para toda a variável x, se φ é instância de alguma tautologia, então $\exists x \varphi$ é universalmente válida.	□	□
5. Para qualquer tipo de linguagem L e para quaisquer duas fórmulas atómicas φ e ψ tais que $x \notin \mathrm{LIV}(\psi)$, $\exists x(\varphi \wedge \psi)$ é uma forma normal prenexa logicamente equivalente a $(\exists x \varphi) \wedge \psi$.	□	□
6. Para todo o tipo de linguagem com símbolos de relação unários R e Q, o conjunto $\{\exists x_0 \mathsf{R}(x_0), \exists x_0 \mathsf{Q}(x_0), \forall x_0 \neg(\mathsf{R}(x_0) \wedge \mathsf{Q}(x_0))\}$ é semanticamente inconsistente.	□	□

Grupo II

Nas questões 1(a), 2(a), 2(b), 2(c), 2(d) e 4, apresente a sua resposta no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Seja L um tipo de linguagem cujo único símbolo de função é f, sendo f um símbolo binário.

   (a) Dê exemplo de um L-termo t_1 com três subtermos e de um L-termo t_2 com um subtermo tais que $(\mathsf{f}(x_1, x_2)[t_1/x_1])[t_2/x_2] \neq (\mathsf{f}(x_1, x_2)[t_2/x_2])[t_1/x_1]$. Justifique.
   Resposta:

   (b) Sejam t_1, t_2 L-termos tais que $\mathrm{VAR}(t_1) = \emptyset$ e $\mathrm{VAR}(t_2) = \emptyset$. Prove que, para quaisquer duas variáveis distintas x, y, $(t[t_1/x])[t_2/y] = (t[t_2/y])[t_1/x]$.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{=, \mathsf{P}\}, \mathcal{N})$, em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$. Seja $E = (\mathbb{N}_0, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

$\overline{\mathsf{c}} = 2$

$\overline{\mathsf{f}} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $\overline{\mathsf{f}}(n_1, n_2) = n_1 \times n_2$

$\overline{=} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}_0^2 : n_1 = n_2\}$

$\overline{\mathsf{P}} = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \text{ é primo}\}$

Seja a a atribuição em E tal que $a(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

(a) Indique $\mathsf{f}(\mathsf{c}, \mathsf{f}(x_1, x_3))[a]_E$. Justifique.

Resposta:

(b) Indique $(\forall x_2((\mathsf{P}(x_3) \wedge x_3 = \mathsf{f}(x_1, x_2)) \to (x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3)))[a]_E$. Justifique.

Resposta:

(c) Diga se a L-fórmula $(\forall x_2((\mathsf{P}(x_3) \wedge x_3 = \mathsf{f}(x_1, x_2)) \to (x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3)))$ é válida em E. Justifique.

Resposta:

(d) Indique, sem justificar, uma L-fórmula válida em E que represente a afirmação: 2 é primo, mas é o único par que é primo.

Resposta:

3. Seja L um tipo de linguagem com uma constante c e com os símbolos de relação unários R e Q. Construa uma derivação em DN que mostre: $\forall x_0(\mathsf{R}(x_0) \vee \mathsf{Q}(x_0)), \neg\mathsf{R}(\mathsf{c}) \vdash \mathsf{Q}(\mathsf{c})$.

4. Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ L-fórmulas e x uma variável tal que $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$. Prove que $\forall x(\psi \to \varphi) \models (\exists x\psi) \to \varphi$.

Resposta:

Cotações

I.	II.1.	II.2.	II.3.	II.4.
6	2+2	1,5+2+1,5+1,5	1,75	1,75