Universidade do Minho — LCC

Dep. de Matemática e Aplicações — 2016/2017

Lógica CC

2º Teste A | 10 de janeiro de 2017 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ____________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, espetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

	V	F
1. Para todo o tipo de linguagem com um símbolo de relação binário R, x_1 é substituível sem captura de variáveis por qualquer L-termo em $\exists x_1 \mathsf{R}(x_0, x_1) \wedge \exists x_0 \neg \mathsf{R}(x_1, x_0)$.	☐	☐
2. Para todo o tipo de linguagem L que apenas contém uma constante e um símbolo de relação unário, existem 3×3^3 L-estruturas cujo domínio é $\{1, 2, 3\}$.	☐	☐
3. Para todo o tipo de linguagem L e para toda a L-fórmula φ e variável x, se φ é válida numa L-estrutura E, então $\forall x \varphi$ também é válida em E.	☐	☐
4. Para todo o tipo de linguagem L com um símbolo de relação unário R, a L-fórmula $\neg \exists x_0 (\mathsf{R}(x_0) \wedge \neg \mathsf{R}(x_0))$ é universalmente válida e não é instância de tautologias.	☐	☐
5. Para todo o tipo de linguagem que inclua $=$ como símbolo de relação binário, $\exists x_0 \exists x_1 (x_1 = x_3 \wedge \neg x_2 = x_0)$ é uma forma normal prenexa logicamente equivalente a $(\exists x_2\, x_2 = x_3) \wedge (\exists x_0\, \neg x_2 = x_0)$.	☐	☐
6. Para todo o tipo de linguagem com símbolos de relação unários R e Q, o conjunto $\{\forall x_0 (\mathsf{R}(x_0) \vee \mathsf{Q}(x_0)), \exists x_0 \neg \mathsf{R}(x_0), \exists x_0 \neg \mathsf{Q}(x_0)\}$ é semanticamente inconsistente.	☐	☐

Grupo II

Nas questões 1(a), 2(a), 2(b), 2(c), 2(d) e 4, apresente a sua resposta no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Seja L um tipo de linguagem cujos únicos símbolos de função são uma constante c e um símbolo de função binário f.

   (a) Indique todos os L-termos t tais que t tem no máximo três subtermos e $\mathrm{VAR}(t) = \emptyset$ e apresente as respetivas sequências de formação.

   Resposta:

   (b) Sejam t', t'' dois L-termos e x, y duas variáveis distintas tais que $x \notin \mathrm{VAR}(t'')$. Prove que, para todo o L-termo t, $(t[t'/x])[t''/y] = (t[t''/y])[t'[t''/y]/x]$.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{=, \mathsf{R}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(\mathsf{R}) = 2$. Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

$$\bar{\mathsf{c}} = 0 \qquad \bar{=} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : z_1 = z_2\}$$
$$\bar{\mathsf{f}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \bar{\mathsf{f}}(z_1, z_2) = z_1 \times z_2 \qquad \bar{\mathsf{R}} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : z_1 < z_2\}$$

e seja a a atribuição em E tal que $a(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

(a) Indique $\mathsf{f}(x_1, \mathsf{f}(x_2, \mathsf{c}))[a]_E$. Justifique.
Resposta:

(b) Indique $(\forall x_1(\mathsf{f}(x_1, x_2) = \mathsf{c} \to (x_1 = \mathsf{c} \vee x_2 = \mathsf{c})))[a]_E$. Justifique.
Resposta:

(c) Diga se a L-fórmula $(\forall x_1(\mathsf{f}(x_1, x_2) = \mathsf{c} \to (x_1 = \mathsf{c} \vee x_2 = \mathsf{c})))$ é válida em E. Justifique.
Resposta:

(d) Indique, sem justificar, uma L-fórmula válida em E que represente a afirmação: O produto de dois inteiros é positivo somente se esses inteiros são ambos positivos.
Resposta:

3. Seja L um tipo de linguagem com os símbolos de relação unários R e Q. Construa uma derivação em DN que mostre: $\forall x_0(\mathsf{R}(x_0) \to \mathsf{Q}(x_0)), \exists x_1 \mathsf{R}(x_1) \vdash \exists x_1 \mathsf{Q}(x_1)$.

4. Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ L-fórmulas e x uma variável tal que $x \notin LIV(\psi)$. Prove que $(\exists x\varphi) \wedge \psi \models \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

Resposta:

Cotações	I.	II.1.	II.2.	II.3.	II.4.
	6	2+2	1,5+2+1,75+1,25	1,75	1,75