Universidade do Minho | 20 de Junho de 2014

2º Teste de

Lógica EI

Lic. Eng. Informática | Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique** adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. (a) Construa uma derivação em DNP que prove que $(p_1 \to p_2) \to \neg(p_1 \wedge \neg p_2)$ é um teorema.
   (b) Mostre que $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_1 \wedge p_2)$ não é um teorema.
   (c) Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Prove que: se $\Gamma, p_1 \vdash \neg p_1 \wedge p_2$ então, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma, p_1 \vdash \varphi$.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\underbrace{\{\mathsf{c}, \mathsf{f}, \mathsf{g}\}}_{\text{função}}, \underbrace{\{\mathsf{Q}, \mathsf{R}\}}_{\text{relação}}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{g}) = 2$ $\mathcal{N}(\mathsf{Q}) = 1$ e $\mathcal{N}(\mathsf{R}) = 2$.
   (a) Dê exemplo de um L-termo t cujas sequências de formação têm pelo menos 4 elementos.
   (b) Dê exemplo de uma L-fórmula φ tal que $LIV(\varphi) = \emptyset$, explicitando o conjunto $subf(\varphi)$ das subfórmulas de φ.
   (c) Considere a L-fórmula $\psi = (\forall x_0 \mathsf{Q}(f(x_0)) \wedge \mathsf{R}(x_1, \mathsf{c})) \to \exists x_2 \neg \mathsf{Q}(\mathsf{g}(x_1, x_2))$. Dê exemplo de uma variável x e de um L-termo t tais que x não é substituível por t em ψ.
   (d) Defina por recursão estrutural a função $u : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t faz corresponder o número de ocorrências dos símbolos de aridade maior que 0 em t.

3. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{R}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{R}) = 2$ e $\mathcal{N}(=) = 2$. Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

$$\overline{\mathsf{c}} = 0 \qquad \overline{\mathsf{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x < y\}$$
$$\overline{\mathsf{f}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{\mathsf{f}}(x) = |x| \qquad \overline{=} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x = y\}$$

   (a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = 1 - i$. Calcule:
      (i) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(x_2))[a]$;
      (ii) $\exists x_1(R(x_2, x_1) \wedge \mathsf{f}(x_2) = x_1)[a]$.
   (b) Seja φ a L–fórmula $\forall x_1(R(x_1, c) \to (\neg(\mathsf{f}(x_1) = x_1) \wedge \mathsf{f}(\mathsf{f}(x_1)) = \mathsf{f}(x_1)))$. Prove que:
      (i) φ é válida em E;
      (ii) φ não é universalmente válida.
   (c) Indique (sem justificar) uma L-fórmula válida em E que represente a afirmação:
   Para cada inteiro positivo, existe um inteiro negativo cujo valor em módulo é maior que esse inteiro positivo.

4. Sejam L um tipo de linguagem, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x arbitrários. Mostre que: $\forall x(\varphi \vee \psi), \exists x \neg \psi \models \exists x \varphi$.

2º TESTE LÓGICA E I

20 / junho / 2014

1

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1 \wedge \neg p_2}^{(2)}}{p_1}\wedge_1 E \qquad \cancel{p_1 \to p_2}^{(1)}}{p_2}\to E \qquad \dfrac{\cancel{p_1 \wedge \neg p_2}^{(2)}}{\neg p_2}\wedge_2 E}{\bot}\neg E}{\neg(p_1 \wedge \neg p_2)}\neg I^{(2)}}{(p_1 \to p_2) \to \neg(p_1 \wedge \neg p_2)}\to I^{(1)}$$

é uma derivação cuja conclusão é $(p_1 \to p_2) \to \neg(p_1 \wedge \neg p_2)$ sem hipóteses não canceladas. Logo, é uma derivação em DNP que prova que $(p_1 \to p_2) \to \neg(p_1 \wedge \neg p_2)$ é um teorema.

b) Pelo Teorema da Adequação, sabemos que $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_1 \wedge p_2)$ não é um teorema se e só se não é uma tautologia. Atendendo à tabela de verdade

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_1 \wedge p_2$	$p_1 \to p_2$	$(p_1 \to p_2) \to (\neg p_1 \wedge p_2)$
1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0

podemos comprovar que $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_1 \wedge p_2)$ não assume sempre o valor lógico 1, pelo que não é uma tautologia. Portanto, $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_1 \wedge p_2)$ não é um teorema.

c) Admitamos que $\Gamma, p_1 \vdash \neg p_1 \wedge p_2$. Pelo Teorema da Adequação resulta que $\Gamma, p_1 \models \neg p_1 \wedge p_2$. Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{p_1\}$. Sabemos, então, que $v(\neg p_1 \wedge p_2) = 1$. Deste modo, $v(p_1) = 1$ (porque $v \models \Gamma \cup \{p_1\}$) e $v(\neg p_1) = 1$ (porque $v(\neg p_1 \wedge p_2) = 1$), o que é uma contradição. Assim, não existe nenhuma valoração que satisfaça $\Gamma \cup \{p_1\}$, pelo que $\Gamma \cup \{p_1\}$ é inconsistente. Logo, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma, p_1 \vdash \varphi$.

2.

$$L = (\{c, f, g\}, \{Q, R\}, \mathcal{N})$$

$\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(Q) = 1$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

a)

<u>OBS</u>: O conjunto T_L é definido indutivamente por:

1) $c \in T_L$;
2) $x_i \in T_L$ (para todo $i \in \mathbb{N}_0$) ;
3) se $t \in T_L$ então $f(t) \in T_L$;
4) se $t_1, t_2 \in T_L$ então $g(t_1, t_2) \in T_L$.

Consideremos $t = g(x_1, f(x_0))$. Os subtermos de t são x_0, x_1, $f(x_0)$ e $g(x_1, f(x_0))$. Logo, todas as sequências de formação de t têm, pelo menos, estes quatro elementos.

b) Consideremos a L-fórmula $\varphi = Q(c)$. φ é uma L-fórmula atómica, sem ocorrências de variáveis. Logo, $LIV(\varphi) = \emptyset$. Além disso, $subf(\varphi) = \{\varphi\}$.

<u>OBS</u>: Há um nº infinito de exemplos possíveis. Se, por exemplo, considerássemos $\varphi = \forall x_0\, Q(x_0)$, teríamos $LIV(\varphi) = \emptyset$ e $subf(\varphi) = \{\forall x_0 Q(x_0), Q(x_0)\}$.

c)

$$\psi = (\forall x_0\, Q(f(\underset{(1)}{x_0})) \wedge R(\underset{(2)}{x_1}, c)) \to \exists x_2\, \neg Q(g(\underset{(3)}{x_1}, \underset{(4)}{x_2}))$$

As ocorrências (1) e (4) são ligadas e as (2) e (3) são livres.

A ocorrência (2) de x_1 não está no alcance de nenhum quantificador, mas a ocorrência (3) de x_1 está no alcance de $\exists x_2$. Assim, se $x_2 \in VAR(t)$, x_1 não é substituível por t em ψ. Consideremos, por exemplo, $t = f(x_2)$ para $x = x_1$.

d) A função $u: T_L \to \mathbb{N}_0$ é definida por recursão estrutural como:

1) $u(c) = 0$;
2) $u(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
3) $u(f(t)) = 1 + u(t)$, para todo $t \in T_L$;
4) $u(g(t_1, t_2)) = 1 + u(t_1) + u(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in T_L$.

3.

$$L = (\{c, f\}, \{R, =\}, \mathcal{N})$$

$\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(R) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$

$E = (\mathbb{Z}, \bar{\ })$ em que $\bar{c} = 0$, $\bar{f}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto |x|$, $\bar{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x < y\}$, $\bar{=} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} : x = y\}$

a)

i) $f(f(x_2))[a] = \bar{f}(\bar{f}(a(x_2))) = \bar{f}(\bar{f}(1-2)) = \bar{f}(\bar{f}(-1)) =$

$= ||1-1|| = 1$.

ii) Seja τ a L-fórmula $\exists x_1 (R(x_2, x_1) \wedge f(x_2) = x_1)$.

Temos que

$\tau[a] = 1$ se e só se Existe $d \in \text{dom } E$ tal que $(R(x_2, x_1) \wedge f(x_2) = x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$
se e só se Existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $\left(R(x_2, x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1\right.$ e $\left.f(x_2) = x_1\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1\right)$
se e só se Existe $d \in \mathbb{Z}$ t.q. $((a(x_2), d) \in \bar{R}$ e $\bar{f}(a(x_2)) \bar{=} d)$
se e só se Existe $d \in \mathbb{Z}$ t.q. $(-1 < d$ e $1 = d)$, o que é verdade.

Assim, $\tau[a] = 1$

b)

(i) Seja a uma atribuição qualquer em E.

Temos que

$\varphi[a]_E = 1$ sse $\forall d \in \text{dom } E$, $R(x_1, c) \to (\neg(f(x_1) = x_1) \wedge f(f(x_1)) = f(x_1))\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse $\forall d \in \text{dom } E$, $R(x_1, c)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 0$ ou $(\neg(f(x_1) = x_1) \wedge f(f(x_1)) = f(x_1))\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse $\forall d \in \text{dom } E$, $(d, \bar{c}) \notin \bar{R}$ ou $\left(\neg(f(x_1) = x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1\right.$ e $\left.f(f(x_1)) = f(x_1)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1\right)$

sse $\forall d \in \text{dom} f \; \left(d \not< 0 \text{ ou } \left(f(x_1) = x_1 \left[a\binom{x_1}{d} \right] = 0 \text{ e } \bar{f}(\bar{f}(d)) = \bar{f}(d) \right) \right)$

sse $\forall d \in \text{dom} f \; \left(d \not< 0 \text{ ou } \left(\bar{f}(d) \neq d \text{ e } ||d|| = |d| \right) \right)$

sse $\forall d \in \text{dom} f \; \left(d \not< 0 \text{ ou } \left(|d| \neq d \text{ e } |d| = |d| \right) \right)$

$\text{dom} f = \mathbb{Z}$

Seja $d \in \text{dom} f$. Se $d \geqslant 0$, então a afirmação

$$d \not< 0 \text{ ou } (|d| \neq d \text{ e } |d| = |d|)$$

é verdadeira. Se $d < 0$ então $|d| = -d$. Logo, $|d| \neq d$ e, obviamente, $|d| = |d|$. Assim,

$$d \not< 0 \text{ ou } (|d| \neq d \text{ e } |d| = |d|)$$

é verdadeira.

Portanto, $\varphi[a]_E = 1$, para qualquer atribuição a em E, donde φ é válida em E.

(ii) Seja $E' = (\mathbb{Z}, \sim)$ uma estrutura onde $\sim$ é como — exceto na interpretação $\bar{c}$ de c que é o nº inteiro 6.

Dada uma qualquer atribuição a em E',

$$\varphi[a]_{E'} = 1 \text{ sse } \forall d \in \mathbb{Z} \; \underbrace{d \not< 3 \text{ ou } (|d| \neq d \text{ e } |d| = |d|)}_{⊛}.$$

Para $d = 2$, temos que $d = 2 < 3$,

$|d| = |2| = 2 = d$,

e $|d| = 2 = |d|$.

Assim, para $d = 2$, a afirmação ⊛ é falsa, pelo que $\varphi[a]_{E'} = 0$.

Assim, φ não é universalmente válida.

c)

$$\forall x_0 \left(R(0, x_0) \rightarrow \exists x_1 \left(R(x_1, 0) \wedge R(x_0, f(x_1)) \right) \right).$$

Seja (E,a) uma realização de $\{\forall_x(\varphi\vee\psi), \exists_x \neg\psi\}$.

Mostremos que $\exists_x \varphi\, [a]_E = 1$.

Temos que

$$\forall_x(\varphi\vee\psi)\,[a]_E = 1,$$

ou seja

$$(\varphi\vee\psi)\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1 \quad , \text{ para todo } d\in \operatorname{dom} E,$$

i.e.

$$\left(\varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1 \text{ ou } \psi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1\right) \quad , \text{ para todo } d\in\operatorname{dom} E. \quad (*)$$

Além disso,

$$\exists_x \neg\psi\,[a]_E = 1,$$

donde

$$\text{Existe } d_1\in\operatorname{dom} E \text{ tal que } (\neg\psi)\left[a\binom{x}{d_1}\right]_E = 1,$$

pelo que

$$\text{Existe } d_1\in\operatorname{dom} E \text{ tal que } \psi\left[a\binom{x}{d_1}\right]_E = 0. \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$, tomando em $(*)$ $d=d_1$, podemos concluir que $\varphi\left[a\binom{x}{d_1}\right]_E = 1$ (uma vez que $\psi\left[a\binom{x}{d_1}\right]_E = 0$).

Logo,

$$\text{Existe } d\in\operatorname{dom} E\ (d=d_1) \text{ tal que } \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1.$$

Assim,

$$\exists_x\varphi\,[a]_E = 1,$$ como queríamos mostrar.