2º Teste de Lógica E I

15 Junho de 2012

1.

(a)

(i) $(p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_1)$ é um teorema se existe uma derivação desta fórmula sem hipóteses não canceladas.

Ora,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge \neg p_1}^{(1)}}{p_0}\wedge_1 E \quad \cancel{p_0 \rightarrow p_1}^{(2)}}{p_1}\rightarrow E \qquad \dfrac{\cancel{p_0 \wedge \neg p_1}^{(1)}}{\neg p_1}\wedge_2 E}{\dfrac{\bot}{\neg(p_0 \rightarrow p_1)}\neg I^{(2)}}\neg E}{(p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_1)}\rightarrow I^{(1)}$$

é uma derivação de DNP cuja conclusão é $(p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_1)$ sem hipóteses não canceladas. Assim, $(p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_1)$ é um teorema.

OBS: 1) a instância da regra $\rightarrow I$ (1) permite-nos cancelar qualquer folha $p_0 \wedge \neg p_1$

2) a instância da regra $\neg I$ (2) permite-nos cancelar qualquer folha $p_0 \rightarrow p_1$

ii) $p_0 \rightarrow p_3,\ \neg p_3 \vee p_1 \vdash p_0 \rightarrow (p_3 \wedge p_1)$ se existir uma derivação de DNP cuja conclusão é $p_0 \rightarrow (p_3 \wedge p_1)$ e cujas hipóteses não canceladas, se existirem, são fórmulas de $T = \{p_0 \rightarrow p_3,\ \neg p_3 \vee p_1\}$.

Temos que

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad p_0 \rightarrow p_3}{p_3}\rightarrow E \qquad \dfrac{\neg p_3 \vee p_1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad p_0 \rightarrow p_3}{p_3} \quad \cancel{\neg p_3}^{(2)}}{\bot}}{p_1}(\bot) \quad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_1}\vee E^{(2)}}{p_3 \wedge p_1}\wedge I}{p_0 \rightarrow (p_3 \wedge p_1)}\rightarrow I^{(1)}$$

é uma tal derivação.

b) Admitamos que $\Gamma \models p_0 \to p_3$.
Então, se v é uma valoração que satisfaz Γ também satisfaz $p_0 \to p_3$. ⊛

Mostremos que $\Gamma, \neg p_3 \vee p_1 \models p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$ (Pelo Teorema da Completude poderemos, assim, afirmar que $\Gamma, \neg p_3 \vee p_1 \vdash p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$.)

Seja v uma valoração que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg p_3 \vee p_1\}$. Então, v satisfaz Γ e, portanto, v também satisfaz $p_0 \to p_3$ (por ⊛).

Por a)ii), usando o Teorema da Correção, sabemos que

$$p_0 \to p_3, \neg p_3 \vee p_1 \models p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$$

Logo, como $v(p_0 \to p_3) = 1$ e $v(\neg p_3 \vee p_1) = 1$, podemos concluir que $v(p_0 \to (p_3 \wedge p_1)) = 1$.

Assim, $\Gamma, \neg p_3 \vee p_1 \models p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$, o que conclui a prova.

(OBS: poderíamos fazer a prova usando derivações)

2. $L = (\{0, q, +\}, \{P, =\}, \mathcal{N})$

$\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(q) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(P) = 1$, $\mathcal{N}(=) = 2$.

(a) (i) $(\forall x_1 \ (q(x_1) \to P(x_1)))$ não é uma L-fórmula
(para isso, $q(x_1)$ teria de ser uma L-fórmula e não é!)
Tão pouco é um L-termo.

(ii) $+(q(+(0, q(x_0)), x_3))$ não é L-termo pois $\mathcal{N}(q) = 1$ e não $\mathcal{N}(q) = 2$!

Tão pouco é L-fórmula (só tem símbolos de função e não tem de relação)

(iii)

x_1, $P(x_1)$, $\forall x_1\, P(x_1)$, x_0, $q(x_1)$, $=(x_0, q(x_1))$,

$(\forall x_1\, P(x_1)) \vee =(x_0, q(x_1))$, $(\exists x_0\, ((\forall x_1\, P(x_1)) \vee =(x_0, q(x_1))))$

é uma sequência de formação da L-fórmula dada.

(É óbvio que sendo L-fórmula não é L-termo).

(iv) Como a palavra é da forma $+(t_1, t_2)$, nunca seria uma L-fórmula. Como tem o símbolo de relação $=$, tão pouco é um L-termo.

b) $t = (q(x_1) + x_3) + 0$ $\qquad$ $VAR(t) = \{x_1, x_3\}$

$$\varphi: \underset{a)}{P(x_2)} \leftrightarrow \exists x_1\, ((\underset{e)}{x_5} = \underset{c)}{x_1} + q(\underset{b)}{x_2}+0)) \wedge \forall x_0 (P(\underset{d)}{x_1} + \underset{f)}{x_0}) = \underset{g)}{x_3}))$$

ocorrências livres de variáveis em φ: $\underset{x_2}{a)}$, $\underset{x_5}{e)}$, $\underset{x_2}{b)}$, $\underset{x_3}{g)}$

ocorrências ligadas de variáveis em φ: $\underset{x_1}{c)}$, $\underset{x_1}{d)}$, $\underset{x_0}{f)}$

- A ocorrência livre a) de x_2 não está no alcance de nenhum quantificador. A ocorrência livre b) de x_2 está no alcance de $\exists x_1$ e $x_1 \in VAR(t)$. Logo, $\boxed{x_2}$ não é substituível por t em φ.
- A ocorrência livre e) de x_5 está no alcance do quantificador $\exists x_1$ e $x_1 \in VAR(t)$. Logo, $\boxed{x_5}$ não é substituível por t em φ.
- A ocorrência livre g) de x_3 está no alcance dos quantificadores $\forall x_0$ e $\exists x_1$. Como $x_1 \in VAR(t)$, $\boxed{x_3}$ não é substituível por t em φ.

Em relação às outras variáveis, como não ocorrem livres em φ, são substituíveis por t em φ. Assim, o conjunto das variáveis substituíveis por t em φ é $\mathcal{V} \setminus \{x_2, x_3, x_5\}$.

4

(c) $f: T_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é definida, por recursão estrutural como

1) $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{V}$

2) $f(0) = 1$

3) $f(q(t)) = f(t)$, para todo $t \in T_L$

4) $f(+(t_1, t_2)) = f(t_1) + f(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in T_L$.

3. $E = (\mathbb{Q}, \bar{\ })$

$\bar{0}$: zero
$\bar{q}(n) = n^2$ para cada $n \in \mathbb{Q}$
$\bar{+}$: adição
$\bar{P} = \mathbb{Q}^+ \rightarrow$ "é positivo"
$\bar{=}$: igualdade em $\mathbb{Q}$.

(a) i)

$$\begin{aligned}(q(0+x_0) + x_3)[a] &= q(0+x_0)[a] \mathbin{\bar{+}} x_3[a] \\ &= \bar{q}((0+x_0)[a]) + a(x_3) \\ &= \bar{q}(0[a] \mathbin{\bar{+}} x_0[a]) + 0 \\ &= \bar{q}(0 + a(x_0)) + 0 \\ &= \bar{q}(0 + (-3)) + 0 = (-3)^2 = 9\end{aligned}$$

ii) $(P(x_5) \wedge \exists x_3 (q(x_3) = 0 + x_5))[a] = 1$

sse $P(x_5)[a] = 1$ e $\exists x_3 (q(x_3) = 0 + x_5)[a] = 1$

sse $a(x_5) \in \bar{P}$ e $(q(x_3) = 0 + x_5)\left[a\binom{x_3}{d}\right] = 1$ para algum $d \in \operatorname{dom} E$

sse $2 \in \bar{P}$ e $\underbrace{d^2 = 2 \text{ para algum } d \in \mathbb{Q}}_{\text{imp.}}$

Logo, $(P(x_5) \wedge \exists x_3 (q(x_3) = 0 + x_5))[a] = 0$.

b) $\varphi: \quad P(q(x_1)) \to \neg \forall x_2 \, (0 = q(x_2))$

5

(i) Seja a' uma atribuição em E

Temos que

$$E \not\models \varphi[a'] \text{ sse } \varphi[a']_E = 0 \text{ sse } P(q(x_1))[a'] = 1$$

$$\text{e } \left(\neg \forall x_2 \, (0 = q(x_2))\right)[a'] = 0$$

sse $\bar{q}(a'(x_1)) \in \bar{P}$ e $\forall x_2 (0 = q(x_2))\,[a'] = 1$

sse $(a'(x_1))^2$ é positivo e $(0 = q(x_2))\left[a'\binom{x_2}{d}\right] = 1$ para todo $d \in \operatorname{dom} E$

sse $(a'(x_1))^2 > 0$ e $d^2 = 0$ para todo $d \in \operatorname{dom} E$

sse $(a'(x_1))^2 > 0$ e $d^2 = 0$ para todo $d \in \mathbb{Q}$, uma afirmação falsa

Logo, $E \models \varphi[a']$

Sendo a' uma atribuição qualquer em E, podemos afirmar que φ é válida em E.

(ii) Seja $E' = (\{a,b\}, -)$ onde

$\bar{0} = a$

$$\bar{q}: \{a,b\} \to \{a,b\}$$
$$a \mapsto a$$
$$b \mapsto a$$

$\bar{P} = \{a,b\}$

$\bar{=} = \{(a,a)\}$

Seja $a' : \mathcal{V} \longrightarrow \{a, b\} = \operatorname{dom} E'$

$x_i \longmapsto a$

Temos que

$E' \not\models \varphi \; [a']$ sse $P(q(x_1)) \; [a'] = 1$ e $\neg \forall x_2 (0 = q(x_2)) \; [a'] = 0$

sse $\bar{q}(a'(x_1)) \in \bar{P}$ e $\forall x_2 (0 = q(x_2)) \; [a'] = 1$

sse $\bar{q}(a'(x_1)) \in \bar{P}$ e $(0 = q(x_2)) \left[a'\binom{x_2}{d}\right] = 1$ para todo $d \in \operatorname{dom} E'$

sse $\bar{q}(a'(x_1)) \in \bar{P}$ e $(\bar{0}, \bar{q}(d)) \in \bar{=}$ para todo $d \in \operatorname{dom} E'$

sse $a \in \bar{P}$ e $(a, a) \in \bar{=}$, o que é verdade.

c) $\perp$

d)

(i) $\exists x_0 \, P(q(x_0))$

(ii) $\forall x_1 \forall x_2 \; \neg \, (q(x_1 + x_2) = 0)$

4. (a)

i)

4. (a)

(i) Sejam $\mathcal{E}$ uma L-estrutura e a uma atribuição em $\mathcal{E}$ tais que

$$\mathcal{E} \vDash \forall x \varphi \vee \forall x \psi \, [a].$$

Queremos mostrar que $\mathcal{E} \vDash \forall x (\varphi \vee \psi) [a]$.

Temos que

$\mathcal{E} \vDash \forall x \varphi \vee \forall x \psi \, [a]$ sse (para todo $d \in dom\, \mathcal{E}$ $\varphi\left[a\binom{x}{d}\right]=1$ ou para todo $d \in dom\, \mathcal{E}$ $\psi\left[a\binom{x}{d}\right]=1$) $\circledast$

e

$\mathcal{E} \vDash \forall x (\varphi \vee \psi) [a]$ sse para todo $d \in dom\, \mathcal{E}$ $(\varphi \vee \psi)\left[a\binom{x}{d}\right]=1$.
sse $\underbrace{\text{para todo } d \in dom\, \mathcal{E} \left(\varphi\left[a\binom{x}{d}\right]=1 \text{ ou } \psi\left[a\binom{x}{d}\right]=1\right)}_{A}$.

Seja $d \in dom\, \mathcal{E}$. Por $\circledast$, sabemos que $\varphi\left[a\binom{x}{d}\right]=1$ ou $\psi\left[a\binom{x}{d}\right]=1$

Logo, a afirmação A é verdadeira.

Assim, $\mathcal{E} \vDash \forall x (\varphi \vee \psi) [a]$.

(ii) $\neg \forall x (\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \exists x \neg(\varphi \to \psi)$
$\Leftrightarrow \exists x (\varphi \wedge \neg \psi)$

(b) $L = (\{\}, \{>\}, \mathcal{N})$ onde $\mathcal{N}(>)=2$
$\mathcal{E} = (\mathbb{N}_0, -)$ onde $\bar{>}$ é a relação maior do que nos inteiros

Sejam $\varphi: x_0 > x_1$ e consideremos as L-fórmulas

$$\forall x_1 \exists x_0 \varphi$$

e

$$\exists x_0 \forall x_1 \varphi$$

Seja a uma atribuição em $\mathcal{E}$.
Temos que $\mathcal{E} \vDash \forall x_1 \exists x_0 \varphi [a]$ sse para todo $d_1 \in \mathbb{N}_0$ existe $d_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $d_0 > d_1$, uma afirmação verdadeira.

Temos que

$E \vDash \exists x_0 \forall x_1 \varphi\,[a]$ sse Existe $d_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $d_0 > d_1$ para todo $d_1 \in \mathbb{N}_0$, uma afirmação falsa.

Assim,

$$\nvDash \forall x \exists y\, \varphi \to \exists y \forall x\, \varphi$$

2º Teste
Lógica EI
17 junho de 2011

1.

(a)

(i) $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é um teorema se existir uma sua derivação. Ora,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_1}\,\wedge_2 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_0}\,\wedge_1 E \quad \cancel{p_0 \to \neg p_1}^{(1)}}{\neg p_1}\,\to E}{\bot}}{\neg(p_0 \wedge p_1)}\,\neg I^{(2)}}{(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)}\,\to I^{(1)}$$

cancelamentos dados pelas regras
(1) $p_0 \to \neg p_1$
(2) $p_0 \wedge p_1$

é uma derivação de $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$

(ii) $\neg(p_0 \wedge p_1) \vdash (p_0 \to \neg p_1)$ se existir uma derivação de conclusão $p_0 \to \neg p_1$ cujas hipóteses não canceladas, se existirem, são elementos de $\{\neg(p_0 \wedge p_1)\}$. Aqui está uma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \wedge p_1}\,\wedge I \qquad \neg(p_0 \wedge p_1)}{\bot}\,\neg E}{\neg p_1}\,\neg I^{(2)}}{p_0 \to \neg p_1}\,\to I^{(1)}$$

(1) p_0
(2) p_1

b) Sabemos, pelo T. Adequação, que

1) $\neg(p_0 \wedge p_1) \vdash (p_0 \to \neg p_1)$ se e só se $\neg(p_0 \wedge p_1) \models (p_0 \to \neg p_1)$

2) $T \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$ se e só se $T \models \neg(p_0 \wedge p_1)$

3) $T \vdash p_0 \to \neg p_1$ se e só se $T \models p_0 \to \neg p_1$

Admitamos, então, que $T \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$ e mostremos que $T \models p_0 \to \neg p_1$. Seja v uma valoração que satisfaz T. Então, porque $T \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$ e por 2), $v(\neg(p_0 \wedge p_1)) = 1$. Pela alínea a) ii) e por 1), sabemos, então, que $v(p_0 \to \neg p_1) = 1$.

Assim, $T \models p_0 \to \neg p_1$ e, por 3), $T \vdash p_0 \to \neg p_1$.

2. $L = (\{0, s, -\}, \{P, <\}, \mathcal{N})$

$\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(-) = 2$, $\mathcal{N}(P) = 1$ e $\mathcal{N}(<) = 2$.

(a)

(i) $0, s(0), x_2, x_2 - s(0), x_1, s(x_1), s(x_1) - (x_2 - s(0))$ é uma sequência de formação de $s(x_1) - (x_2 - s(0)) \in \mathcal{T}_L$.

(ii) Não pertence nem a $\mathcal{T}_L$ nem a $\mathcal{F}_L$

(iii) $x_1, P(x_1), x_2, x_2 < x_1, \forall x_1 (x_2 < x_1), P(x_1) \wedge \forall x_1 (x_2 < x_1), \exists x_2 (P(x_1) \wedge \forall x_1 (x_2 < x_1))$ é uma sequência de formação de $\exists x_2 (P(x_1) \wedge \forall x_1 (x_2 < x_1)) \in \mathcal{F}_L$

(iv) Não pertence nem a $\mathcal{T}_L$ nem a $\mathcal{F}_L$

(b) $t = x_2 - s(x_1)$ $\qquad VAR(t) = \{x_1, x_2\}$

$$\varphi = \forall x_1 \, (P(\underset{\text{a)}}{\underset{\downarrow}{x_4}}) \to \exists x_0 \, \neg (\underset{\text{b)}}{\underset{\downarrow}{x_0}} < \underset{\text{c)}}{\underset{\downarrow}{x_2}} - s(\underset{\text{d)}}{\underset{\downarrow}{x_1}} - 0)))$$

ocorrências livres: a) de x_4
c) de x_2

ocorrências ligadas: b) de x_0
d) de x_1.

A ocorrência livre a) de x_4 está no alcance do quantificador $\forall x_1$. Como $x_1 \in VAR(t)$, x_4 não é substituível por t em φ.

A ocorrência livre c) de x_2 está no alcance dos quantificadores $\forall x_1$ e $\exists x_0$. Como $x_1 \in VAR(t)$, x_2 não é substituível por t em φ.

Assim, o conjunto das variáveis substituíveis por t em φ é $\mathcal{V} \setminus \{x_2, x_4\}$.

c) $f: \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é dada, por recursão estrutural, por:

1) $f(0) = 0$;

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_{2011} \\ 0 & \text{se } x \in \mathcal{V} \setminus \{2011\} \end{cases}$;

3) $f(s(t)) = f(t)$, para todo $t \in \mathcal{T}_L$;

4) $f(t_1 - t_2) = f(t_1) + f(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$.

3. $E = (\mathbb{Z}, \bar{\ })$

$\bar{0}$: zero

$\bar{s}$: sucessor

$\bar{-}$: subtração em $\mathbb{Z}$

$\bar{P}$: "é par"

$\bar{<}$: "menor do que" em $\mathbb{Z}$

(a)

$$a: \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x_i \longmapsto i$$

(i) $(0 - s(x_1 - x_8))[a] = \bar{0} \,\bar{-}\, \bar{s}\,(a(x_1) \,\bar{-}\, a(x_8)) =$
$= 0 - \bar{s}\,(1 - 8) = -\bar{s}\,(-7) = 6.$

(ii) $(P(x_2) \wedge \exists x_1 (s(x_1) < 0))[a] = 1$ se e só se $P(x_2)[a] = 1$

e $\exists x_1 (s(x_1) < 0)\,[a] = 1$

se e só se $a(x_2) \in \bar{P}$ e $s(x_1) < 0 \left[a \binom{x_1}{d}\right] = 1$ para algum $d \in \mathbb{Z}$

se e só se $a(x_2)$ é par e $d+1 < 0$ para algum $d \in \mathbb{Z}$

se e só se 2 é par e $d < -1$ para algum $d \in \mathbb{Z}$,

uma afirmação verdadeira. Logo,

$$(P(x_2) \wedge \exists x_1 (s(x_1) < 0))\,[a] = 1.$$

(b) $\varphi = \neg P(x_0 - x_1) \rightarrow \big((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0) \big)$.

(i) Seja a uma atribuição em E.

$E \models \varphi[a]$ sse $\varphi[a] = 1$ sse $(\neg P(x_0 - x_1))[a] = 0$ ou $\big((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0)\big)[a] = 1$

sse $P(x_0 - x_1)[a] = 1$ ou $(x_0 < x_1)[a] = 1$ ou $(x_1 < x_0)[a] = 1$

sse $\underbrace{a(x_0) - a(x_1) \text{ é par ou } a(x_0) < a(x_1) \text{ ou } a(x_1) < a(x_0)}_{A}$

Se a é tal que $a(x_0) < a(x_1)$, então esta última afirmação A é verdadeira. Se a é tal que $a(x_1) < a(x_0)$, A também é verdadeira. Se a é tal que $a(x_1) = a(x_0)$, então $a(x_0) - a(x_1) = 0$, pelo que $a(x_0) - a(x_1)$ é par e, portanto, A é verdadeira.

Assim, $E \models \varphi[a]$, para qualquer atribuição a em E, pelo que φ é válida em E.

(ii) Seja $E' = (\{a, b\}, -)$ a L-estrutura onde

- $\bar{0} = a$
- $\bar{s} : \{a,b\} \rightarrow \{a,b\}$
  $a \longmapsto a$
  $b \longmapsto a$
- $\bar{-} : \{a,b\} \times \{a,b\} \longrightarrow \{a,b\}$
  $(x,y) \longmapsto b$
- $\bar{P} = \{a\}$
- $\bar{<} = \{\}$

Seja a uma atribuição em E'.

Temos que

$\varphi[a]_{E'} = 0$ sse $\neg P(x_0 - x_1)[a] = 1$ e $\big((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0)\big)[a] = 0$

sse $P(x_0 - x_1)[a] = 0$ e $(x_0 < x_1)[a] = 0$ e $(x_1 < x_0)[a] = 0$

sse $a(x_0) - a(x_1) \notin \bar{P}$ e $(a(x_0), a(x_1)) \notin \bar{<}$ e $(a(x_1), a(x_0)) \notin \bar{<}$

sse $b \notin \bar{P}$ e $(a(x_0), a(x_1)) \notin \bar{<}$ e $(a(x_1), a(x_0)) \notin \bar{<}$.

Como $\bar{P} = \{a\}$ e $\bar{<}$ é a relação vazia, a afirmação anterior é verdadeira.

Logo, $\varphi[a]_{\mathcal{E}'} = 0$

e, portanto, φ não é universalmente válida.

d)

(i) $\forall x_0 \exists x_1 \left(P(x_1) \wedge (x_0 < x_1) \right)$

(ii) $\forall x_0 \forall x_1 \left((P(x_0) \wedge P(x_1)) \rightarrow P(x_0 - x_1) \right)$

4.

a) Sejam $\mathcal{E}$ uma L-estrutura e a uma atribuição em $\mathcal{E}$ tais que

$$\mathcal{E} \models \exists x (\varphi \wedge \psi)\ [a].$$

Mostremos que $\mathcal{E} \models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)[a]$.

Temos que

$$\mathcal{E} \models \exists x (\varphi \wedge \psi)\ [a] \text{ sse } (\varphi \wedge \psi)\left[a\binom{x}{d}\right] = 1 \text{ para algum } d \in \operatorname{dom} \mathcal{E}$$
$$\text{sse } \varphi\left[a\binom{x}{d}\right] = \psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1, \text{ para algum } d \in \operatorname{dom} \mathcal{E}.$$

Ora,

$$\mathcal{E} \models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)[a] \text{ sse } \exists x \varphi\,[a] = 1 \text{ e } \exists x \psi\,[a] = 1$$
$$\text{sse } \varphi\left[a\binom{x}{d'}\right] = 1 \text{ para algum } d' \in \operatorname{dom} \mathcal{E}$$
$$\text{e } \psi\left[a\binom{x}{d''}\right] = 1 \text{ para algum } d'' \in \operatorname{dom} \mathcal{E}$$

Tomando $d' = d'' = d$, segue-se que

$$\varphi\left[a\binom{x}{d'}\right] = 1 \text{ e } \psi\left[a\binom{x}{d''}\right] = 1.$$

Portanto,

$$\mathcal{E} \models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)\ [a].$$

Logo, $\exists x (\varphi \wedge \psi) \models \exists x \varphi \wedge \exists x \psi$.

(4) Sejam L o tipo de linguagem $L = (\{\}, \{P, I\}, \mathcal{N})$ onde $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(I) = 1$.

Consideremos as L-fórmulas $\varphi : P(x)$ e $\psi : I(x)$.

Seja $E = (\mathbb{N}, -)$ a L-estrutura onde 13

$$\overline{P} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\}$$
$$\overline{I} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\}$$

Seja a uma atribuição em E. Temos que

$E \not\models ((\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \rightarrow \exists x (\varphi \wedge \psi))\, [a]$ se e só se

$(\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)[a] = 1$ e $\exists x (\varphi \wedge \psi)\, [a] = 0$ se e só se

$(\exists x \varphi)[a] = 1$ e $(\exists x \psi)\, [a] = 1$ e $(\varphi \wedge \psi)\, [a\binom{x}{d}] = 0$ para todo $d \in \text{dom } E$ sse

$\varphi\left[a\binom{x}{d_1}\right] = 1$ para algum $d_1 \in \text{dom } E$ e $\psi\left[a\binom{x}{d_2}\right] = 1$ para algum $d_2 \in \text{dom } E$ e $\left(\varphi\left[a\binom{x}{d}\right] = 0 \text{ ou } \psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 0\right)$, para todo $d \in \text{dom } E$ sse

$d_1 \in \overline{P}$ para algum $d_1 \in \mathbb{N}$ e $d_2 \in \overline{I}$ para algum $d_2 \in \mathbb{N}$ e $(d \notin \overline{P}$ ou $d \notin \overline{I})$ para todo $d \in \mathbb{N}$ sse

Existe $d_1 \in \mathbb{N}$ t.q. d_1 é par e existe $d_2 \in \mathbb{N}$ tal que d_2 é ímpar e para todo $d \in \mathbb{N}$ d não é par ou não é ímpar, o que é uma afirmação verdadeira. Logo,

$$\not\models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \rightarrow \exists x (\varphi \wedge \psi).$$