Universidade do Minho		17 de Junho de 2011
	2º Teste de **Lógica EI**	
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique** adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. (a) Construa derivações em DNP que provem que:
   (i) $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é um teorema;
   (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1) \vdash (p_0 \to \neg p_1)$.
   (b) Seja Γ um conjunto de fórmulas do Cálculo Proposicional. Prove que, se $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$, então $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{s}, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathcal{N}(-) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(<) = 2$.
   (a) Das seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_L$, apresente árvores de formação das que pertencem a $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$, e indique (sem justificar) quais as que não pertencem a nenhum desses conjuntos.
   (i) $\mathsf{s}(x_1) - (x_2 - \mathsf{s}(0))$
   (ii) $(x_1 - 0) \vee \mathsf{P}(x_2)$
   (iii) $\exists_{x_2}(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1))$
   (iv) $\forall_{x_0}(\mathsf{P}(x_0, 0) \vee (\mathsf{s}(x_0) < 0))$
   (b) Indique (justificando) o conjunto das variáveis substituíveis pelo L-termo $x_2 - \mathsf{s}(x_1)$ na L-fórmula $\forall_{x_1}(\mathsf{P}(x_4) \to \exists_{x_0}\neg(x_0 < x_2 - \mathsf{s}(x_1 - 0)))$.
   (c) Defina por recursão estrutural a função $f : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t faz corresponder o número de ocorrências da variável x_{2011} em t.

3. Sejam L o tipo de linguagem da pergunta anterior e $E = (\mathbb{Z}, \overline{\ })$ a L-estrutura tal que $\overline{0}$ é o número *zero*, $\overline{\mathsf{s}}$ e $\overline{-}$ são as operações de *sucessor* e *subtração* em $\mathbb{Z}$, respectivamente, $\overline{\mathsf{P}} = 2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ (ou seja, $\overline{\mathsf{P}}$ é o predicado "é par"), e $\overline{<}$ é a relação "menor do que" em $\mathbb{Z}$.
   (a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i$. Calcule:
   (i) $(0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8))\,[a]$
   (ii) $(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a]$
   (b) Seja $\varphi = \neg P(x_0 - x_1) \to ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))$. Prove que:
   (i) φ é válida em E;
   (ii) φ não é universalmente válida.
   (c) Indique (justificando) uma L-fórmula universalmente válida.
   (d) Para cada uma das seguintes afirmações, indique (sem justificar) uma L-fórmula que a represente:
   (i) Todo o número é menor do que algum número par.
   (ii) A diferença de quaisquer dois números pares é par.

4. (a) Sejam L, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x arbitrários. Mostre que $\exists_x(\varphi \wedge \psi) \models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi)$.
   (b) Indique (justificando) L tipo de linguagem, φ e ψ L-fórmulas e x variável tais que $\not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi) \to \exists_x(\varphi \wedge \psi)$.
   (c) Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x tais que $x \notin LIV(\psi)$. Prove que $(\forall_x\varphi) \to \psi \Leftrightarrow \exists_x(\varphi \to \psi)$. (Sugestão: exiba uma série de equivalências lógicas.)

Cotações	1.	2.	3.	4.
	3+1	1,5+1+1,5	2,5+2+1,5+1,5	1,5+1,5+1,5