Dep. Matem., Univ. Minho — 15 de Junho de 2009

Resolução do 2º Teste de

Lógica EI

Lic. Eng. Informática — Duração: 2 horas

Este teste é constituído por 5 questões. ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. Sejam φ e ψ fórmulas, Γ e Δ conjuntos de fórmulas do Cálculo Proposicional. Mostre que:

   (a) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;

   R: *Pelo Teorema da Completude, para provar que a fórmula $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ é um teorema basta provar que é uma tautologia, ou seja, para provar $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ basta mostrar*

$$\models \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

   Ora esta afirmação, de que a fórmula $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ é uma tautologia, pode ser deduzida: ou como uma consequência imediata da lei de De Morgan $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$; ou por construção da tabela de verdade de $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ e verificação de que toda a valoração atribui o valor de verdade 1 a esta fórmula.

   Alternativamente, *poder-se-ia provar que a fórmula $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ é um teorema construindo uma derivação em DNP dela. A árvore seguinte é uma tal derivação.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)}}{\varphi\vee\psi}\vee_1 I \quad \cancel{\neg(\varphi\vee\psi)}^{(1)}}{\perp}\neg E}{\neg\varphi}\neg I^{(2)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\psi}^{(3)}}{\varphi\vee\psi}\vee_2 I \quad \cancel{\neg(\varphi\vee\psi)}^{(1)}}{\perp}\neg E}{\neg\psi}\neg I^{(3)}}{\neg\varphi\wedge\neg\psi}\wedge I \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\vee\psi}^{(4)} \quad \dfrac{\cancel{\varphi}^{(5)} \quad \dfrac{\cancel{\neg\varphi\wedge\neg\psi}^{(1)}}{\neg\varphi}\wedge_1 E}{\perp}\neg E \quad \dfrac{\cancel{\psi}^{(5)} \quad \dfrac{\cancel{\neg\varphi\wedge\neg\psi}^{(1)}}{\neg\psi}\wedge_2 E}{\perp}\neg E}{\perp}\vee E^{(5)}}{\neg(\varphi\vee\psi)}\neg I^{(4)}}{\neg(\varphi\vee\psi)\leftrightarrow(\neg\varphi\wedge\neg\psi)}\leftrightarrow I^{(1)}$$

   Conclui-se assim que $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

   (b) se $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$, $\Gamma \vdash \neg\varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \psi$.

   R: *Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$, $\Gamma \vdash \neg\varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$. De $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$, deduzimos a existência de derivações D_1 e D_2 de $\varphi \vee \psi$ e $\neg\varphi$, respectivamente, a partir de Γ. Então*

$$\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \varphi\vee\psi\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)} \quad \begin{matrix}D_2\\ \neg\varphi\end{matrix}}{\perp}\neg E}{\psi}(\perp) \quad \cancel{\psi}^{(1)}}{\psi}\vee E^{(1)}$$

   é uma derivação de ψ em que as hipóteses não canceladas pertencem a Γ, e portanto a Δ pois $\Gamma \subseteq \Delta$. Mostrou-se assim que $\Delta \vdash \psi$.

   Alternativamente, *apresentamos uma outra resolução que utiliza os teoremas da Correcção e da Completude. De $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$, deduzimos pelo Teorema da Correcção que $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ e $\Gamma \models \neg\varphi$. Com o objectivo de mostrar que $\Delta \models \psi$, consideremos uma valoração v que satisfaz Δ. Dado que $\Gamma \subseteq \Delta$, tem-se então que $v \models \Gamma$. Agora, de $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ e $\Gamma \models \neg\varphi$ resulta que $v(\varphi \vee \psi) = v(\neg\varphi) = 1$. Logo $v(\varphi) = 0$ e portanto $v(\psi) = 1$, o que prova que $\Delta \models \psi$. Então, usando o Teorema da Completude, conclui-se que $\Delta \vdash \psi$.*

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \cup, \cap, \setminus\}, \{=, \subseteq\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\cup) = \mathcal{N}(\cap) = \mathcal{N}(\setminus) = 2$ e $\mathcal{N}(=) = \mathcal{N}(\subseteq) = 2$.

   (a) Das seguintes palavras de $\mathcal{A}_L^+$ verifique se algumas são L-termos ou L-fórmulas e, nesses casos, construa as respectivas árvores de formação.

   (i) $((x_1 \cap x_2) \cup 0) \setminus x_3$;

   (ii) $x_1 \cap (0 \cup x_3 \subseteq x_1)$;

   (iii) $(x_1 \cup x_2) \cap x_3 = (x_1 \cap x_3) \cup (x_2 \cap x_3)$;

   (iv) $\forall_{x_1}((x_1 = x_3) \subseteq (x_1 \cap x_2))$.

R: (i) *A palavra* $((x_1 \cap x_2) \cup 0) \setminus x_3$ *é um L-termo. A sua árvore de formação é a seguinte*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_1 \in \mathcal{T}_L}\,x_1 \qquad \dfrac{}{x_2 \in \mathcal{T}_L}\,x_2}{(x_1 \cap x_2) \in \mathcal{T}_L}\,\cap \qquad \dfrac{}{0 \in \mathcal{T}_L}\,0}{((x_1 \cap x_2) \cup 0) \in \mathcal{T}_L}\,\cup \qquad \dfrac{}{x_3 \in \mathcal{T}_L}\,x_3}{((x_1 \cap x_2) \cup 0) \setminus x_3 \in \mathcal{T}_L}\,\setminus$$

(iii) *A palavra* $(x_1 \cup x_2) \cap x_3 = (x_1 \cap x_3) \cup (x_2 \cap x_3)$ *é uma L-fórmula atómica. A sua árvore de formação é portanto*

$$\dfrac{}{(x_1 \cup x_2) \cap x_3 = (x_1 \cap x_3) \cup (x_2 \cap x_3) \in \mathcal{F}_L}\,\mathrm{At}_L$$

(ii) *e* (iv) *As palavras* $x_1 \cap (0 \cup x_3 \subseteq x_1)$ *e* $\forall_{x_1}((x_1 = x_3) \subseteq (x_1 \cap x_2))$ *não são L-termos nem L-fórmulas.*

(b) Considere a L-estrutura $E = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \overline{})$ onde:

- $\overline{0} = \emptyset$ é o conjunto vazio;
- $\overline{\cup} = \cup$ é a união de conjuntos;
- $\overline{\cap} = \cap$ é a intersecção de conjuntos;
- $\overline{\setminus} = \setminus$ é a complementação de conjuntos ($A \setminus B$ é o complementar de B em A);
- $\equiv$ é a igualdade de conjuntos;
- $\overline{\subseteq} = \subseteq$ é a inclusão de conjuntos.

Seja a a atribuição em E tal que $a(x_i) = \{n \in \mathbb{N} \mid n > i\}$. Calcule:

(i) $((x_1 \cup x_2) \setminus x_{20})[a]$;

R: *O valor do L-termo* $((x_1 \cup x_2) \setminus x_{20})$ *para a atribuição a é o elemento de* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*, domínio de E, obtido pelos seguintes cálculos recursivos:*

$$\begin{aligned}
((x_1 \cup x_2) \setminus x_{20})[a] &= (x_1 \cup x_2)[a] \,\overline{\setminus}\, x_{20}[a] \\
&= \Big(x_1[a] \overline{\cup} x_2[a]\Big) \,\overline{\setminus}\, a(x_{20}) \\
&= \Big(a(x_1) \overline{\cup} a(x_2)\Big) \,\overline{\setminus}\, a(x_{20}) \\
&= \Big(\{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\}\Big) \setminus \{n \in \mathbb{N} \mid n > 20\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\} \setminus \{n \in \mathbb{N} \mid n > 20\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 20\} \\
&= \{2, 3, 4, \ldots, 19, 20\}.
\end{aligned}$$

(ii) $((x_1 \setminus (x_2 \cup x_4)) = ((x_1 \setminus x_2) \cup (x_1 \setminus x_4)))[a]$.

R: *De forma análoga à apresentada na alínea anterior, obtém-se*

$$\begin{aligned}
(x_1 \setminus (x_2 \cup x_4))[a] &= a(x_1) \,\overline{\setminus}\, \Big(a(x_2) \overline{\cup} a(x_4)\Big) \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\} \setminus \Big(\{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 4\}\Big) \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\} \setminus \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\} \\
&= \{2\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
((x_1 \setminus x_2) \cup (x_1 \setminus x_4))[a] &= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 2\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 4\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 4\} \\
&= \{2, 3, 4\}.
\end{aligned}$$

Logo, por definição de valor lógico de uma L-fórmula, tem-se

$$\begin{aligned}
& ((x_1 \setminus (x_2 \cup x_4)) = ((x_1 \setminus x_2) \cup (x_1 \setminus x_4)))[a] = 1 \\
\textit{se e só se}\quad & (x_1 \setminus (x_2 \cup x_4))[a] \equiv ((x_1 \setminus x_2) \cup (x_1 \setminus x_4))[a] \\
\textit{se e só se}\quad & \{2\} = \{2, 3, 4\}.
\end{aligned}$$

Como esta última condição não é válida conclui-se que

$$((x_1 \setminus (x_2 \cup x_4)) = ((x_1 \setminus x_2) \cup (x_1 \setminus x_4)))[a] = 0.$$

(c) Sejam E a L-estrutura e a a atribuição da alínea (b), e considere o seguinte conjunto de L-fórmulas

$$\Gamma = \{\neg(x_2 \cap x_5 \subseteq x_9),\ \forall_{x_1}(x_1 \cup 0 = x_1)\}.$$

Verifique se (E, a) é uma realização de Γ.

R: *Denotemos os elementos de Γ por γ_1 e γ_2 respectivamente. Isto é,*

$$\gamma_1 = \neg(x_2 \cap x_5 \subseteq x_9) \quad e \quad \gamma_2 = \forall_{x_1}(x_1 \cup 0 = x_1).$$

O par (E, a) é uma realização de Γ pois $E \models \gamma_1[a]$ e $E \models \gamma_2[a]$, ou seja, $\gamma_1[a]_E = \gamma_2[a]_E = 1$, como mostramos de seguida. De facto, tem-se

$$\begin{array}{lll} \gamma_1[a]_E = 1 & sse & (x_2 \cap x_5 \subseteq x_9)[a]_E = 0 \\ & sse & \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid n > 5\} \not\subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n > 9\} \\ & sse & \{n \in \mathbb{N} \mid n > 5\} \not\subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n > 9\} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{lll} \gamma_2[a]_E = 1 & sse & \forall_{N_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}\ (x_1 \cup 0 = x_1)[a\binom{x_1}{N_1}]_E = 1 \\ & sse & \forall_{N_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}\ N_1 \cup \emptyset = N_1. \end{array}$$

Como as afirmações $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 5\} \not\subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n > 9\}$ e $\forall_{N_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}\ N_1 \cup \emptyset = N_1$ são verdadeiras, deduz-se que $\gamma_1[a]_E = \gamma_2[a]_E = 1$, o que prova que (E, a) é uma realização de Γ.

(d) Determine uma L-fórmula logicamente equivalente à L-fórmula

$$\forall_{x_2}(\neg(x_2 = 0) \wedge (x_1 \subseteq x_2))$$

que não use o conectivo $\wedge$ nem o quantificador universal.

R: *Tem-se*

$$\begin{array}{lll} & \forall_{x_2}(\neg(x_2 = 0) \wedge (x_1 \subseteq x_2)) & \\ \Leftrightarrow & \forall_{x_2}\neg((x_2 = 0) \vee \neg(x_1 \subseteq x_2)) & \textit{pelas leis de De Morgan} \\ \Leftrightarrow & \neg\exists_{x_2}((x_2 = 0) \vee \neg(x_1 \subseteq x_2)) & \textit{por uma propriedade da equivalência lógica.} \end{array}$$

Portanto, a L-fórmula

$$\neg\exists_{x_2}((x_2 = 0) \vee \neg(x_1 \subseteq x_2))$$

está nas condições pedidas já que não tem ocorrências do conectivo $\wedge$ nem do quantificador universal.

3. Sejam L um tipo de linguagem do Cálculo de Predicados, φ e ψ L-fórmulas e x uma variável. Verifique quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) $\models (\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$;

R: *Mostremos que esta afirmação é verdadeira. Seja σ a fórmula do Cálculo Proposicional*

$$\sigma = (p_0 \to \neg p_1) \to (\neg p_0 \vee \neg p_1).$$

Note-se que σ é uma tautologia. Para provar este facto poder-se-ia construir a tabela de verdade de σ, ou recordar que a equivalência lógica $\theta_1 \to \theta_2 \Leftrightarrow \neg\theta_1 \vee \theta_2$ é válida para quaisquer fórmulas θ_1 e θ_2 do Cálculo Proposicional, daqui resultando que $(p_0 \to \neg p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_1)$ é uma tautologia e portanto que σ também o é.

Por outro lado, a L-fórmula $\gamma = (\varphi \to \neg\psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ é uma instância de σ pois

$$\gamma = \sigma[\varphi/p_0; \psi/p_1],$$

ou seja, γ é obtida de σ pela substituição simultânea de p_0 por φ e de p_1 por ψ. Pode-se agora concluir que γ é uma L-fórmula válida pois é uma instância da tautologia σ, o que prova a afirmação.

(b) $\models (\exists_x \neg(\varphi \vee \psi)) \to (\neg(\forall_x \psi))$.

R: *Esta afirmação é verdadeira. De facto, sejam $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura e a uma atribuição em E, arbitrárias. Queremos provar que*

$$E \models (\exists_x \neg(\varphi \vee \psi)) \to (\neg(\forall_x \psi))[a],$$

ou seja, que

$$((\exists_x \neg(\varphi \vee \psi)) \to (\neg(\forall_x \psi)))[a] = 1.$$

Ora, tem-se

$$\begin{array}{ll} & ((\exists_x \neg(\varphi \vee \psi)) \to (\neg(\forall_x \psi)))[a] = 1 \\ \textit{se e só se} & (\exists_x \neg(\varphi \vee \psi))[a] = 0 \quad \textit{ou} \quad (\neg(\forall_x \psi))[a] = 1 \\ & \qquad \textit{(por def. de valor lógico de uma L-fórmula } \sigma_1 \to \sigma_2\textit{)} \\ \textit{se e só se} & \forall_{d \in D}\ (\neg(\varphi \vee \psi))[a\binom{x}{d}] = 0 \quad \textit{ou} \quad (\forall_x \psi)[a] = 0 \\ & \qquad \textit{(por def. de valor lógico de L-fórmulas } \exists_x \sigma_1 \textit{ e } \neg\sigma_2\textit{)} \\ \textit{se e só se} & \forall_{d \in D}\ (\varphi \vee \psi)[a\binom{x}{d}] = 1 \quad \textit{ou} \quad \exists_{d' \in D}\ \psi[a\binom{x}{d'}] = 0 \\ & \qquad \textit{(por def. de valor lógico de L-fórmulas } \neg\sigma_1 \textit{ e } \forall_x \sigma_2\textit{)} \\ \textit{se e só se} & \forall_{d \in D}\ (\varphi[a\binom{x}{d}] = 1 \textit{ ou } \psi[a\binom{x}{d}] = 1) \quad \textit{ou} \quad \exists_{d' \in D}\ \psi[a\binom{x}{d'}] = 0 \qquad (*) \\ & \textit{(por def. de valor lógico de L-fórmulas } \sigma_1 \vee \sigma_2\textit{).} \end{array}$$

Analisando a validade da afirmação (*), dir-se-ia que:

- *se $\forall_{d \in D}\ \varphi[a\binom{x}{d}] = 1$ ou $\psi[a\binom{x}{d}] = 1$ é verdadeira, então a afirmação (*) é verdadeira;*
- *senão, $\exists_{d \in D}\ \varphi[a\binom{x}{d}] = 0$ e $\psi[a\binom{x}{d}] = 0$, pelo que, em particular $\exists_{d'=d \in D}\ \psi[a\binom{x}{d'}] = 0$, e então a afirmação (*) é verdadeira;*

Assim, em qualquer caso a afirmação (*) é verdadeira pelo que a prova está concluída.

4. Considere uma estrutura E cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ e onde estão definidas a constante 1, as funções

$$\begin{array}{rl} h: & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto x(y-2)+2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} g: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 + 2, \end{array}$$

e as relações usuais de igualdade e de menor ou igual em $\mathbb{R}$.

(a) Determine o tipo de linguagem L_0 adequado para esta estrutura.

R: *Consideremos o tipo de linguagem $L_0 = (\{1, g, h\}, \{=, \leq\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(1) = 0$, $\mathcal{N}(g) = 1$, $\mathcal{N}(h) = \mathcal{N}(=) = \mathcal{N}(\leq) = 2$.*

Então a estrutura E pode ser considerada uma L_0-estrutura $E = (\mathbb{R}, \overline{})$ em que $\overline{s} = s$ para cada símbolo $s \in \{1, g, h, =, \leq\}$.

(b) Escreva uma L_0-fórmula que represente a afirmação: "a função g tem um ponto de mínimo absoluto".

R: *A afirmação "a função g tem um ponto de mínimo absoluto" significa que existe um elemento $a \in \mathbb{R}$ tal que para todo o elemento $b \in \mathbb{R}$ se verifica $g(a) \leq g(b)$. Logo a firmação pode ser representada pela seguinte L_0-fórmula:*

$$\exists_{x_0} \forall_{x_1}\ (g(x_0) \leq g(x_1)).$$

(c) Verifique se E é modelo da fórmula que determinou na alínea anterior.

R: *Sim, E é um modelo da L_0-fórmula $\varphi = \exists_{x_0} \forall_{x_1} (g(x_0) \leq g(x_1))$. Para demonstrar esta proposição, temos de provar que $E \models \varphi[a]$ para toda a atribuição a em E. Ora, sendo a uma atribuição em E, tem-se*

$$E \models \varphi[a] \quad \textit{se e só se} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{R}} \forall_{n_1 \in \mathbb{R}}\ (g(n_0) \leq g(n_1)).$$

Como é evidente tem-se $2 \leq n_1^2 + 2$*, ou seja,* $g(0) \leq g(n_1)$*, para todo o* $n_1 \in \mathbb{R}$*. Logo, basta tomar* $n_0 = 0$*, para concluir que a afirmação*

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{R}} \forall_{n_1 \in \mathbb{R}} \, (g(n_0) \leq g(n_1))$$

é verdadeira e, portanto, que E *é um modelo de* φ*.*

5. Seja L um tipo de linguagem do Cálculo de Predicados.

(a) Defina por recursão estrutural a função LIV : $\mathcal{F}_L \to \mathcal{P}(\mathcal{V})$, que a cada L-fórmula φ associa o conjunto $\mathrm{LIV}(\varphi)$ das variáveis que têm ocorrências livres em φ.

R: *O conjunto* $\mathrm{LIV}(\varphi)$ *das variáveis que têm ocorrências livres em* φ *é definido, por recursão estrutural em* φ*, como:*

i) $\mathrm{LIV}(\perp) = \emptyset$*;*

ii) Para todo o símbolo de relação R *de aridade* n *e para todos os* $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$*,*

$$\mathrm{LIV}(R(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{VAR}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{VAR}(t_n);$$

iii) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$*,* $\mathrm{LIV}(\neg\psi) = \mathrm{LIV}(\psi)$*;*

iv) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$ *e* $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$*,* $\mathrm{LIV}(\psi \square \sigma) = \mathrm{LIV}(\psi) \cup \mathrm{LIV}(\sigma)$*.*

v) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$ *e cada* $x \in \mathcal{V}$*,*

$$\mathrm{LIV}(\exists_x \psi) = \mathrm{LIV}(\psi) \setminus \{x\} \quad \textit{e} \quad \mathrm{LIV}(\forall_x \psi) = \mathrm{LIV}(\psi) \setminus \{x\}.$$

(b) Seja φ uma L-fórmula e sejam a_1 e a_2 atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$. Prove por indução estrutural sobre φ que, se $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, então

$$E \models \varphi[a_1] \quad \text{se e só se} \quad E \models \varphi[a_2].$$

R: *Mostremos então por indução estrutural em* φ *que, se* $a_1(x) = a_2(x)$ *para toda a variável* $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$*, então*

$$E \models \varphi[a_1] \quad \textit{se e só se} \quad E \models \varphi[a_2]. \tag{1}$$

Suponhamos que a_1 *e* a_2 *são atribuições numa* L*-estrutura* $E = (D, \overline{})$ *tais que* $a_1(x) = a_2(x)$ *para toda a variável* $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$*.*

i) Caso $\varphi = \perp$*. Então,* $E \not\models \varphi[a_1]$ *e* $E \not\models \varphi[a_2]$*, donde a condição (1) é imediata.*

ii) Caso $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$*, onde* R *é um símbolo de relação de aridade* n *e* $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$*. Por hipótese,* $a_1(x) = a_2(x)$ *para toda a variável* $x \in \mathrm{LIV}(\varphi) = \mathrm{VAR}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{VAR}(t_n)$*. Logo, por um resultado provado nas aulas, tem-se* $t_1[a_1] = t_1[a_2], \ldots, t_n[a_1] = t_n[a_2]$*. Agora,*

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad & \textit{sse} \quad (t_1[a_1], \ldots, t_n[a_1]) \in \overline{R} \\ & \textit{sse} \quad (t_1[a_2], \ldots, t_n[a_2]) \in \overline{R} \\ & \textit{sse} \quad E \models \varphi[a_2], \end{aligned}$$

o que prova a condição (1).

iii) Caso $\varphi = \neg\psi$*. Então,* $\mathrm{LIV}(\varphi) = \mathrm{LIV}(\psi)$*. Suponhamos por hipótese de indução que o resultado é válido para* ψ*, pelo que* $E \models \psi[a_1]$ *sse* $E \models \psi[a_2]$*. Tem-se*

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad & \textit{sse} \quad E \not\models \psi[a_1] \\ & \textit{sse} \quad E \not\models \psi[a_2] \quad \textit{por hipótese de indução} \\ & \textit{sse} \quad E \models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

iv) Caso $\varphi = \psi \square \sigma$*, onde* $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$*. Então,* $\mathrm{LIV}(\varphi) = \mathrm{LIV}(\psi) \cup \mathrm{LIV}(\sigma)$*, donde* $a_1(x) = a_2(x)$ *para toda a variável* $x \in \mathrm{LIV}(\psi) \cup \mathrm{LIV}(\sigma)$*. Suponhamos por hipótese de indução que o resultado é válido para* ψ *e para* σ*, pelo que* $E \models \psi[a_1]$ *sse* $E \models \psi[a_2]$ *e* $E \models \sigma[a_1]$ *sse* $E \models \sigma[a_2]$*. Vamos verificar que* $E \models (\psi \square \sigma)[a_1]$ *sse* $E \models (\psi \square \sigma)[a_2]$*.*

- *Caso* $\square = \wedge$*. Neste caso tem-se*

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad & \textit{sse} \quad E \models \psi[a_1] \textit{ e } E \models \sigma[a_1] \\ & \textit{sse} \quad E \models \psi[a_2] \textit{ e } E \models \sigma[a_2] \quad \textit{por hipótese de indução} \\ & \textit{sse} \quad E \models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

- *Caso* $\square = \vee$. *Neste caso tem-se*

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad & sse \quad E \models \psi[a_1] \text{ ou } E \models \sigma[a_1] \\ & sse \quad E \models \psi[a_2] \text{ ou } E \models \sigma[a_2] \quad \text{por hipótese de indução} \\ & sse \quad E \models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

- *Caso* $\square = \rightarrow$, *tem-se*

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad & sse \quad E \not\models \psi[a_1] \text{ ou } E \models \sigma[a_1] \\ & sse \quad E \not\models \psi[a_2] \text{ ou } E \models \sigma[a_2] \quad \text{por hipótese de indução} \\ & sse \quad E \not\models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

- *Caso* $\square = \leftrightarrow$, *tem-se*

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad & sse \quad \psi[a_1]_E = \sigma[a_1]_E \\ & sse \quad \psi[a_2]_E = \sigma[a_2]_E \quad \text{por hipótese de indução} \\ & sse \quad E \models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

v) Caso $\varphi = Q_y\psi$, *onde* $Q \in \{\exists, \forall\}$. *Então,* $\mathrm{LIV}(\varphi) = \mathrm{LIV}(\psi) \setminus \{y\}$, *donde* $a_1(x) = a_2(x)$ *para toda a variável* $x \in \mathrm{LIV}(\psi) \setminus \{y\}$. *Logo, sendo* a_1' *e* a_2' *as atribuições* $a_1\binom{y}{d}$ *e* $a_2\binom{y}{d}$, *respectivamente, tem-se* $a_1'(x) = a_2'(x)$ *para toda a variável* $x \in \mathrm{LIV}(\psi)$. *Suponhamos por hipótese de indução que o resultado é válido para* ψ, *pelo que* $E \models \psi[a_1']$ *sse* $E \models \psi[a_2']$. *Então*

$$\begin{aligned} E \models \varphi[a_1] \quad & sse \quad Q_{d \in D}\ E \models \psi[a_1'] \\ & sse \quad Q_{d \in D}\ E \models \psi[a_2'] \quad \text{por hipótese de indução} \\ & sse \quad E \models \varphi[a_2]. \end{aligned}$$

Das condições i)-v) e do Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}_L$ *conclui-se o resultado pretendido.*

(FIM)

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.
	1.5+1.5	1.5+1.5+1.5+1.5	1.5+1.5	1.5+1.5+1.5	1.5+2