Universidade do Minho	2º Teste de **Lógica EI**	22 de Junho de 2010
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas (se nada for dito em contrário).*

1. Sejam φ e ψ fórmulas do Cálculo Proposicional.
   (a) Construa uma derivação em DNP mostrando que $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \psi)$.
   (b) Mostre que, se $\{\neg\varphi \rightarrow \neg\psi\}$ é sintacticamente inconsistente, então $\{\neg(\neg\varphi \wedge \psi)\}$ também o é.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, +, \times\}, \{P, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(+) = \mathcal{N}(\times) = 2$, $\mathcal{N}(P) = 1$ e $\mathcal{N}(<) = 2$.
   Seja $E = (\mathbb{Q}, \overline{})$ a L-estrutura tal que $\overline{0}$ é o número *zero*, $\overline{+}$ e $\overline{\times}$ são as operações de *adição* e *multiplicação* em $\mathbb{Q}$, respectivamente, $\overline{P} = \mathbb{Q}^+$ (ou seja, $\overline{P}$ é o predicado "é positivo"), e $\overline{<}$ é a relação "menor do que" em $\mathbb{Q}$.
   (a) Das seguintes palavras de $\mathcal{A}_L^+$, apresente árvores de formação das que pertencem a $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$, e indique (sem justificar) quais as que não pertencem a nenhum desses conjuntos.
      i. $(x_1 \times 0) + x_3$
      ii. $P(x_1) \times 0$
      iii. $x_0 + x_2 \rightarrow x_3$
      iv. $\forall_{x_0}((x_0 < 0) \vee P(x_0))$
   (b) Indique o conjunto das variáveis substituíveis pelo L-termo $x_1 \times x_2$ na L-fórmula $\exists_{x_0}(P(x_1) \wedge \forall_{x_2}\neg P(x_0 \times x_2))$.
   (c) Seja ainda a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = (-1)^i i$. Calcule:
      i. $(P(x_1 \times x_2) \wedge (0 < x_3))\,[a]$
      ii. $(\forall_{x_0}(0 < x_0 \times x_2) \rightarrow P(x_0))\,[a]$
   (d) Diga se a fórmula $(\forall_{x_0}(0 < x_0 \times x_2) \rightarrow P(x_0))$ é válida em E e se é universalmente válida.
   (e) Escreva uma L-fórmula φ que represente, na estrutura E, a afirmação "dois números quaisquer são positivos só se o seu produto é também positivo" e outra ψ que represente, também na estrutura E, a afirmação "a soma de dois números quaisquer positivos é positiva".
   (f) Considerando as fórmulas que escreveu na alínea anterior, diga se ψ é consequência semântica de φ.

3. Diga justificando se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições (para quaisquer tipo de linguagem L do Cálculo de Predicados, L-fórmulas φ e ψ e variável x):
   (a) $\forall_x(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg\exists_x(\varphi \wedge \neg\psi)$;
   (b) $(\neg\varphi \wedge \forall_x\psi) \rightarrow (\varphi \vee \forall_x\psi) \Leftrightarrow \neg\bot$;
   (c) $\models \forall_x(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\forall_x\varphi \vee \forall_x\psi)$.

4. Seja L um tipo de linguagem do Cálculo de Predicados.
   (a) Defina por recursão estrutural uma função $f : \mathcal{F}_L \rightarrow \mathcal{F}_L$ com a seguinte propriedade: para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $f(\varphi)$ é uma fórmula logicamente equivalente a φ e onde não ocorre o quantificador universal.
   (b) Prove que a função que definiu na alínea anterior tem a propriedade exigida.

Cotações	1.	2.	3.	4.
	2+1,5	1,5+1+1,5+1,5+1,5+1,5	1,5+1,5+1,5	1,5+2