Universidade do Minho | LCC
Dep. de Matemática | 2020/2021

Lógica CC

1º Teste A | 25 de novembro de 2020 — duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Número: ____________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Para qualquer fórmula φ com n subfórmulas, qualquer sequência de formação da fórmula $\varphi \wedge p_1$ tem pelo menos $n+2$ subfórmulas.	□	□
2.	Seja $\varphi = p_0 \vee p_1$ e $\psi = \neg p_2 \wedge p_1$. Então, $var(\varphi[\psi/p_1]) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.	□	□
3.	Para qualquer tautologia φ e para qualquer valoração v, se v satisfaz $\varphi \to p_1$, então v satisfaz $(\varphi \to p_1) \to p_1$.	□	□
4.	Seja X o conjunto de conetivos $\{\neg, \vee, \leftrightarrow\}$. Para qualquer forma normal conjuntiva φ, existe uma fórmula ψ tal que $\psi \Leftrightarrow \varphi$ e os conetivos de ψ pertencem a X.	□	□
5.	Existe um conjunto de fórmulas Γ que contém $\{p_1 \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow p_0), p_1 \wedge \neg p_2\}$ e é semanticamente consistente.	□	□
6.	Seja $\Gamma = \{p_1 \to p_2, \neg p_2 \vee p_1\}$. Então, $\Gamma \models p_1 \vee p_2$.	□	□

Grupo II

Nas questões 1(a), 1(c), 2 e 3, responda no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das fórmulas proposicionais definido indutivamente pelas seguintes regras:

   (i) $p_i \in \mathcal{F}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

   (ii) se $\varphi \in \mathcal{F}$, então $\neg\neg\varphi \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

   (iii) se $\varphi \in \mathcal{F}$, então $\varphi \vee \perp \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

   (iv) se $\varphi \in \mathcal{F}$, então $\varphi \wedge \varphi \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

   (v) se $\varphi \in \mathcal{F}$, então $(\neg \perp) \to \varphi \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

   (a) Sem justificar, dê exemplo de uma fórmula pertencente a $\mathcal{F}$ na qual cada um dos conetivos no conjunto $\{\wedge, \to\}$ ocorra exatamente uma vez.

   Resposta:

   (b) Mostre por indução estrutural que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}$, existe $i \in \mathbb{N}_0$ tal que $\varphi \Leftrightarrow p_i$.

(c) Sem justificar, defina por recursão estrutural em $\mathcal{F}$ a função $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ tal que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}$, $f(\varphi)$ é o número de ocorrências do conetivo $\neg$.

Resposta:

2. Apresente uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente à fórmula $p_1 \to (p_2 \leftrightarrow p_3)$. Justifique.

Resposta:

3. Considere as seguintes afirmações acerca de dois pássaros e duas gaiolas.

   (i) O pássaro 2 está numa das gaiolas se o pássaro 1 também está.

   (ii) O pássaro 1 não está em nenhuma das gaiolas, mas o pássaro 2 está na gaiola 1.

   (a) Representando por p_1 e p_2 as afirmações atómicas "o pássaro 1 está na gaiola 1" e "o pássaro 1 está na gaiola 2", respetivamente, e por p_3 e p_4 as afirmações "o pássaro 2 está na gaiola 1" e "o pássaro 2 está na gaiola 2", respetivamente, indique (sem justificar) fórmulas do Cálculo Proposicional φ_1 e φ_2 que representem as afirmações (i) e (ii), respetivamente.

   Resposta: $\varphi_1 \quad =$

   $\varphi_2 \quad =$

   (b) Diga se as afirmações (i) e (ii) são consistentes? Justifique.

   Resposta:

4. Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que: se $\varphi \to \psi$ é tautologia e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$.

5. Construa uma demonstração D em DNP da fórmula $(\neg p_2 \wedge p_0) \to \neg(p_2 \vee \neg p_0)$ e, caso exista, indique uma subderivação de D cuja conclusão seja $\perp$.

Cotações	I	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5
	6	1,25+2+1,75	2	1,5+1,5	1,75	2,25