Universidade do Minho | LCC
Dep. de Matemática | 2019/2020

Lógica CC

1º Teste A | 6 de novembro de 2019 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ____________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

	V	F
1. As sequências de formação de comprimento mínimo da fórmula $((p_1 \lor p_2) \to \neg p_1)[\neg p_1/p_1]$ têm 6 elementos.	☐	☐
2. Para qualquer fórmula φ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se φ tem n subfórmulas e $p_0 \in var(\varphi)$, $(p_0 \lor p_1)[\varphi/p_1]$ tem n subfórmulas.	☐	☐
3. Existe uma infinidade de valorações que satisfazem a fórmula $(p_0 \lor p_1) \land \neg p_1$.	☐	☐
4. Para qualquer fórmula φ e para qualquer conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma \models \varphi \lor \psi$, então $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ é semanticamente consistente.	☐	☐
5. No sistema formal DNP, existem derivações da fórmula $p_0 \lor p_1$ a partir do conjunto de fórmulas $\{\neg p_0, p_0 \to p_1\}$.	☐	☐
6. Para qualquer conjunto de fórmulas Γ, se Γ é maximalmente consistente e $\{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \lor p_2\} \subset \Gamma$, então $\{p_1, p_2\} \subset \Gamma$.	☐	☐

Grupo II

Nas questões 1(a), 1(b), 2, 3 e 4(a), responda no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das fórmulas proposicionais definido indutivamente pelas seguintes regras:

   (i) $p_i \in \mathcal{F}$, para todo i ímpar;
   (ii) $(\neg p_i) \in \mathcal{F}$, para todo i par;
   (iii) se $\varphi \in \mathcal{F}$, então $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
   (iv) se $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\psi \in \mathcal{F}$, então $(\varphi \land \psi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
   (v) se $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\psi \in \mathcal{F}$, então $(\varphi \to \psi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

   (a) A fórmula $(((\neg p_1) \land p_3) \to (\neg p_2))$ pertence a $\mathcal{F}$? Justifique.
   Resposta:

(b) Indique $\varphi \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow ((p_1 \rightarrow \perp) \vee p_3) \wedge p_2$. Justifique.

Resposta:

(c) Mostre por indução estrutural que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

2. Sejam φ e ψ fórmulas tais que $\varphi \vee \psi$ é tautologia e $\varphi \models \psi$. Mostre que ψ é tautologia.

Resposta:

3. Apresente uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente à fórmula $\neg((p_1 \leftrightarrow p_2) \vee p_3)$. Justifique.

Resposta:

4. Sobre três sacos, sabe-se que cada um deles pode estar vazio ou conter uma bola.

(a) Exprima as duas afirmações que se seguem através de fórmulas do Cálculo Proposicional, indicando a frase atómica associada a cada uma das variáveis proposicionais utilizadas.

(i) O saco 1 está vazio somente se um dos outros sacos não está vazio.

(ii) Os sacos 2 e 3 estão ambos vazios ou ambos contêm uma bola.

Resposta:

(b) Assumindo que as afirmações (i) e (ii) da alínea (a) são verdadeiras, é possível que a soma do número de bolas nos três sacos seja 1? Justifique.

5. Construa uma demonstração em DNP da fórmula $(\neg p_1 \vee p_2) \rightarrow ((p_2 \leftrightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))$.

6. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ tais que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente. Mostre que, se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, então existe um subconjunto de Γ que é finito e inconsistente.

Cotações	I.	II.1.	II.2.	II.3.	II.4.	II.5.	II.6
	6	1,25+1,5+1,75	1,5	1,75	1,5+1,5	1,75	1,5