Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

LCC
2018/2019

Lógica CC

1º Teste A | 6 de novembro de 2018 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ______________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	As sequências de formação da fórmula $\neg(p_1 \vee p_2) \to (p_1 \vee p_2)$ de comprimento mínimo têm 5 elementos.	□	□
2.	Para quaisquer fórmulas φ e ψ e para qualquer variável proposicional p, $subf(\varphi[\psi/p]) = subf(\varphi) \cup subf(\psi)$.	□	□
3.	Para quaisquer fórmulas φ e ψ, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é tautologia, então φ e ψ são ambas tautologias ou φ e ψ são ambas contradições.	□	□
4.	Para qualquer fórmula φ e para qualquer conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é semanticamente inconsistente, então $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente.	□	□
5.	No sistema formal DNP, existem derivações da fórmula $p_1 \leftrightarrow p_2$ a partir do conjunto de fórmulas $\{\neg p_1, p_1 \to p_2\}$.	□	□
6.	Para qualquer conjunto de fórmulas Γ, se Γ é maximalmente consistente e $p_1 \vee p_2 \notin \Gamma$, então $\neg p_2 \in \Gamma$.	□	□

Grupo II

Nas questões 1.(a), 1.(b), 1.(d), 2. e 3.(a), apresente a sua resposta no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das fórmulas proposicionais definido indutivamente pelas seguintes regras:

   (i) $(p_i \vee p_j) \in \mathcal{F}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$ e para todo $j \in \mathbb{N}_0$;
   (ii) se $\varphi \in \mathcal{F}$, então $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
   (iii) se $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\psi \in \mathcal{F}$, então $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
   (iv) se $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\psi \in \mathcal{F}$, então $(\varphi \to \psi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

   (a) A fórmula $((\neg(p_1 \vee p_2)) \to (p_2 \vee p_3))$ pertence a $\mathcal{F}$? Justifique.
   Resposta:

(b) Indique $\varphi \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \neg p_0$. Justifique.

Resposta:

(c) Mostre por indução estrutural que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

(d) Sem justificar, defina por recursão estrutural em $\mathcal{F}$ uma função $f : \mathcal{F} \longrightarrow \{0,1\}$ tal que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}$, $f(\varphi) = 1$ se e só se a variável proposicional p_0 não ocorre em φ.

Resposta:

2. Apresente uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente à fórmula $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (p_3 \vee \perp)$. Justifique.

Resposta:

3. Dois programas A e B, que podem apenas terminar com o valor 1 ou com o valor 0, dizem-se equivalentes quando ambos não terminam ou quando ambos terminam com o mesmo valor.

(a) Exprima as duas afirmações que se seguem através de fórmulas do Cálculo Proposicional, indicando a frase atómica associada a cada uma das variáveis proposicionais utilizadas.

(i) A não termina ou A termina com o valor 1.

(ii) A e B são equivalentes.

Resposta:

(b) Assumindo que as afirmações (i) e (ii) da alínea (a) são verdadeiras e que B termina, o que pode concluir acerca dos programas A e B? Justifique.

4. Construa uma demonstração em DNP da fórmula $(\neg p_0 \wedge (p_1 \to \perp)) \to \neg(p_0 \vee p_1)$.

5. Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que se $\Gamma \models \varphi$ e $\neg\varphi$ é teorema de DNP, então existe um subconjunto de Γ que é finito e inconsistente.

Cotações	I.	II.1.	II.2.	II.3.	II.4.	II.5.
	6	1,25+1,25+1,75+1,25	1,75	1,75+1,75	1,75	1,5