LÓGICA EI

RESOLUÇÃO DO 1º TESTE

24/abril/2013

1.

(a) 1, 21, 3211, 3213211 é uma sequência de formação de u.

De facto, cada elemento da sequência ou é um elemento da base de G ou é obtido dos elementos anteriores por aplicação de uma regra ((2) ou (3)) da definição indutiva de G. Além disso, o último elemento da sequência é u.

(NOTA: i) $1 \in G$ por (1); ii) $21 \in G$ por i) e (2); iii) $3211 \in G$ por i), ii) e (3); $3213211 \in G$ por ii), iii) e (3).)

(b) $S(3211) = 3 + S(21) + S(1) = 3 + 2 + S(1) + S(1) = 3+2+1+1 = 7$

$S(3xy) = 3 + S(x) + S(y)$, $x = 21$; $y = 1$

$S(2\bar{x}) = 2 + S(\bar{x})$, $\bar{x} = 1$

(c) Seja $P(x)$ uma propriedade sobre os elementos de G.

Se 1) $P(1)$;

2) se $P(x)$ então $P(2x)$, para todo $x \in G$;

3) se $P(x)$ e $P(y)$ então $P(3xy)$, para todo $x, y \in G$;

então, $P(x)$ para todo $x \in G$.

(d) Seja $P(x)$ a propriedade "$S(x)$ é ímpar" (para $x \in G$).

1) $S(1) = 1$

1 é ímpar

Logo, $P(1)$

2) Seja $x \in G$ tal que $P(x)$, i.e. $S(x)$ é ímpar. (H.I).

Então, $S(2x) \underset{\text{df. } S}{=} 2 + \underbrace{S(x)}_{\text{ímpar (H.I)}}$ também é ímpar (pois a soma de um par com um ímpar é ímpar).

Logo, $P(2x)$.

3) Sejam $x, y \in G$ tais que $P(x)$ e $P(y)$, ou seja, $S(x)$ e $S(y)$ são ímpares (H.I).

Temos que

$$S(3xy) = 3 + S(x) + S(y).$$

Como, por H.I., $S(x)$ e $S(y)$ são ímpares, segue-se que $S(3xy)$ é ímpar (porque a soma de três ímpares é ímpar).

Portanto, $P(3xy)$.

Por 1), 2), 3), pelo princípio de Indução Estrutural em G, $P(x)$ para todo $x \in G$.

2. $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é a função definida por recursão estrutural do seguinte modo:

1) $f(p_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
2) $f(\perp) = 0$;
3) $f((\neg\varphi)) = 2 + f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
4) $f((\varphi \square \psi)) = 2 + f(\varphi) + f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

3. Seja $\varphi = p_1 \vee p_2$. Temos que

$$(p_0 \wedge \neg p_1)[\varphi / p_1] = p_0 \wedge \neg(p_1 \vee p_2)$$

Assim, $var((p_0 \wedge \neg p_1)[\varphi/p_1]) = var(p_0 \wedge \neg(p_1 \vee p_2)) = \{p_0, p_1, p_2\}$.

4.

$$(p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3)) \to ((p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_3) \Leftrightarrow \neg(p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3)) \vee ((p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_3) \Leftrightarrow$$

$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

$$\Leftrightarrow (\neg p_1 \wedge (\neg p_2 \vee p_3)) \vee (p_1 \wedge \neg p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \Leftrightarrow$$

Leis de DeMorgan
Distributividade

$$\Leftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_3),$$ uma FND

logicamente equivalente à fórmula dada.

5.

p_1	p_2	p_3	$p_1 \to p_2$	$\neg p_2$	$p_2 \vee p_3$	$p_1 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)$	
1	1	1	1	0	1	1	
1	1	0	1	0	1	1	
1	0	1	0	1	1	1	
1	0	0	0	1	0	0	
0	1	1	1	0	1	0	
0	1	0	1	0	1	0	
0	0	1	1	1	1	0	
0	0	0	1	1	0	1	← é o único caso em que as três fórmulas são simultaneamente verdadeiras.

a) Se v é uma valoração tal que $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, então $v(p_1 \to p_2) = v(\neg p_2) = v(p_1 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)) = 1$. (ver tabela)

Logo, v satisfaz Γ, pelo que Γ é consistente.

A afirmação é, portanto, verdadeira.

b) Se v é tal que $v \models \Gamma$ então $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$ (ver tabela). Logo, $v(\neg p_3) = 1$. Assim, $\Gamma \models \neg p_3$, pelo que a afirmação é verdadeira.

6. (a) frases atómicas: Há vida em Marte
Zuzarte gosta de tarte
Zuzarte é um marciano.

Representemos estas frases por p_0, p_1, p_2, respetivamente.
Então, as frases do enunciado podem ser representadas pelas seguintes fórmulas do CP:

$p_0 \to p_1$ (Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte)
$p_2 \vee \neg p_1$ (Zuzarte é um marciano ou não gosta de tarte)
$\neg p_2 \wedge p_0$ (Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte).

b) Se v é uma valoração tal que $v(\neg p_2 \wedge p_0) = 1$, então $v(p_2) = 0$ e $v(p_0) = 1$.
Se $v(p_0) = 1$, para que $v(p_0 \to p_1)$ seja também 1, temos de ter $v(p_1) = 1$
Ora, sendo $v(p_2) = 0$ e $v(p_1) = 1$, segue-se que $v(p_2 \vee \neg p_1) = 0$.
Logo, se as afirmações "Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte" e "Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte" são verdadeiras simultaneamente, então a outra afirmação é falsa, o que mostra que as afirmações não podem ser simultaneamente verdadeiras.

7.

(a) Sejam $\Gamma = \{p_1\}$ e $\varphi = \neg p_1$.
Se v é uma valoração tal que $v(p_1) = 1$, então $v \models \Gamma$, logo, Γ é consistente.
Sabemos que φ não é uma contradição (se v' é uma valoração tal que $v'(p_1) = 0$, $v'(\varphi) = 1$).
No entanto, $\Gamma \cup \varphi = \{p_1, \neg p_1\}$ é inconsistente, pois não existe nenhuma valoração v'' tal que $v''(p_1) = v''(\neg p_1) = 1$ (teríamos, nesse caso, $1 = v''(\neg p_1) = 1 - v''(p_1) = 0$). A afirmação é falsa.

(b) Admitamos que 1) $\Gamma \models \varphi$
e 2) $\varphi \Rightarrow \psi$ é tautologia.
Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, por 1), $v(\varphi) = 1$.
Por 2), sabemos que $v(\varphi \to \psi) = 1$. Assim, $v(\psi) = 1$.

Logo, se v é uma valoração que satisfaz Γ, temos $v(\psi) = 1$, ou seja, $\Gamma \models \psi$.

A afirmação é verdadeira.