Universidade do Minho		24 de Abril de 2013
	1^o Teste	
	Lógica EI	
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique** adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja G o subconjunto de A^* definido indutivamente como se segue:

   (1) $1 \in G$;

   (2) se $x \in G$ então $2x \in G$, para todo $x \in A^*$;

   (3) se $x, y \in G$ então $3xy \in G$, para todo $x, y \in A^*$.

   Considere ainda a função $S : G \longrightarrow \mathbb{N}$ definida, por recursão estrutural, do seguinte modo:

   - $S(1) = 1$;
   - para todo $x \in G$, $S(2x) = 2 + S(x)$;
   - para todo $x, y \in G$, $S(3xy) = 3 + S(x) + S(y)$.

   (a) Indique uma sequência de formação do elemento $u = 3213211$ de G.

   (b) Calcule $S(3211)$.

   (c) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para G.

   (d) Mostre que, para todo $x \in G$, $S(x)$ é ímpar.

2. Defina, por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$, a função $f : \mathcal{F}^{CP} \to \mathbb{N}_0$ que a cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ faz corresponder o comprimento da palavra φ. (Não deverá assumir qualquer convenção para a omissão de parênteses. Por exemplo, $f(\,((\neg p_0) \wedge p_1)\,) = 8$.)

3. Dê exemplo de uma fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $var((p_0 \wedge \neg p_1)[\varphi/p_1]) = \{p_0, p_1, p_2\}$.

4. Apresente uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente à fórmula $(p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3)) \to ((p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_3)$.

5. Considere o conjunto de fórmulas $\Gamma = \{p_1 \to p_2, \neg p_2, p_1 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)\}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) Γ é consistente. (b) $\Gamma \models \neg p_3$.

6. Considere as seguintes afirmações:

   - Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte.
   - Zuzarte é um marciano ou não gosta de tarte.
   - Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte.

   (a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

   (b) Mostre que as três afirmações acima não podem ser simultaneamente verdadeiras.

7. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, se Γ é consistente e φ não é contradição, então $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é consistente.

   (b) Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, se $\Gamma \models \varphi$ e $\varphi \to \psi$ é tautologia, então $\Gamma \models \psi$.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	1,5+1,5+1,5+2	1,5	1,5	1,5	1,5+1,5	1,5+1,5	1,5+1,5