1. Alfabeto $\{a, b, +, -, (,)\}$

G definido ~~...~~ indutivamente por

1) $a \in G$

2) Se $u \in G$ então $(u-b) \in G$

3) se $u, y \in G$ então $(u+y) \in G$

→ a) $u = ((a-b)+(((a+a)-b)-b))$

Sequência de formação de u

$a, (a-b), (a+a), ((a+a)-b), (((a+a)-b)-b),$

$\underbrace{((a-b)+(((a+a)-b)-b))}_{u}$

pq cada elemento da sequência ou pertence à base da definição indutiva ou é obtido ~~...~~ por aplicação das regras 2 ou 3 a elementos anteriores e o último elemento da sequência é u.

→ b) $g(u) =$ ~~...~~

$= g((a-b)) + g((((a+a)-b)-b)) =$

$= g(a) - 1 + g(((a+a)-b)) - 1 =$

$= g(a) - 1 + g((a+a)) - 1 - 1 =$

$= 0 - 1 + g(a) + g(a) - 1 - 1 =$

$= 0 - 1 + 0 + 0 - 1 - 1 =$

$= -3$

→ c) Princípio de indução estrutural

Seja $P(u)$ uma propriedade sobre os elementos u de G.

Se 1) $P(a)$

2) Se $P(u)$ então $P((u-b))$, para todo $u \in G$

3) Se $P(u)$ e $P(y)$ então $P((u+y))$, para todo $u, y \in G$

então

$P(u)$ para todo $u \in G$.

→ d) $\boxed{P(u): \underline{g(u)} \leq \cancel{0}0}$

① $g(a) = 0 \leq 0$

Logo, $P(a)$.

② Seja $u \in G$ tal que $P(u)$ (H.I.)

Queremos provar $P((u-b))$. Sabemos, então, que $g(u) \leq 0$.

$$g((u-b)) = \underbrace{g(u)}_{\substack{\leq 0 \\ \text{por H.I.}}} - 1 \leq 0$$

Portanto, $P((u-b))$.

③ Sejam $u, y \in G$ tais que $P(u)$ e $P(y)$, ou seja,

$\boxed{g(u) \leq 0 \quad e \quad g(y) \leq 0}$ (H.I.)

? $P((u+y))$?

$$g((u+y)) = \underbrace{g(u)}_{\substack{\leq 0 \\ \text{por H.I.}}} + \underbrace{g(y)}_{\substack{\leq 0 \\ \text{por H.I.}}} \leq 0$$

Logo, $P((u+y))$.

Por ①, ② e ③, pelo Princípio de Indução estrutural em G

$P(u)$, para todo $u \in G$.

→ e) $h: G \to \mathbb{N}_0$

$h(u)$: nº de ocorrências da letra b na palavra u.

h é definida por recursão estrutural por:

1) $h(a) = 0$

2) $h((u-b)) = h(u) + 1$, para todo $u \in G$

3) $h((u+y)) = h(u) + h(y)$, para todo $u, y \in G$

→ f) Qualquer coisa.

$\cancel{g} \leq h$

2. a)

$\varphi = (p0 \vee \neg p1) \wedge (\neg \underbrace{p0}_{\alpha} \vee \underbrace{\neg p1}_{\tau})$

$(u \to y) \Leftrightarrow (\neg u \vee y)$

$\neg(u \to y) \Leftrightarrow (u \wedge \neg y)$

a) $\psi \Leftrightarrow \varphi$

Conectivos de ψ: $\neg$, $\to$

Resolução I

$\Leftrightarrow (\neg \overset{\alpha}{p1} \vee \overset{\tau}{p0}) \wedge (p0 \to \neg p1)$

$\Leftrightarrow \underbrace{(p1 \to p0)}_{u} \wedge \underbrace{(p0 \to \neg p1)}_{y}$

$\Leftrightarrow \underbrace{(p1 \to p0)}_{u} \wedge \neg \underbrace{\neg (p0 \to \neg p1)}_{y}$

$\Leftrightarrow \neg (p1 \to p0) \to \neg (p0 \to \neg p1)$

Resolução II

$\varphi \Leftrightarrow (\underbrace{p0 \wedge \neg p0}_{\Leftrightarrow \bot}) \vee \neg p1$

$\Leftrightarrow \bot \vee \neg p1$

$\Leftrightarrow \neg p1$

$\Leftrightarrow \neg(p1 \to p1) \vee \neg p1$

$\Leftrightarrow (p1 \to p1) \to \neg p1$

b) $\varphi \models \neg p1$ (sempre que φ é V temos também $\neg p1$ V)

p0	p1	$p0 \vee \neg p1$	$\neg p0 \vee \neg p1$	φ	$\neg p1$
1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$

pela análise da tabela sempre que φ toma o valor lógico 1 (linha 2 e 4), $\neg p1$ também toma o valor lógico 1.

c) Pela tabela construída em b), φ nem sempre toma o valor lógico 1, pelo que não é tautologia.

3. p_0: escola fecha

p_1: país poupa

p_2: futuro melhor

a) $p_0 \rightarrow p_1 : \varphi$

$\neg p_0 \leftrightarrow p_2 : \psi$

$p_1 \vee \neg p_2 : \sigma$

b)

p_0	p_1	p_2	φ	ψ	σ
1	$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Pela análise da tabela, φ, ψ e σ são simultaneamente verdadeiras na linha 2 e 5 nas quais p_1 é verdadeira. Logo, o país poupa.

$v \models \Gamma$: $v(\sigma)=1$ para todos σ de Γ

$v \models \sigma$: $v(\sigma)=1$

$\models \sigma$: σ é tautologia

$\Gamma \models \sigma$: σ é consequência semântica de Γ

4) V ou F

a) $\models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\models \neg\varphi$ ou $\models \psi$

$v(\varphi \rightarrow \psi) : v(\varphi)=0$ ou $v(\psi)=1$

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$
1	$\boxed{1}$	1	$\boxed{0}$
1	0	0	0
0	$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$
0	$\boxed{0}$	1	$\boxed{1}$

$\not\models \neg\varphi$

$\not\models \psi$

Falso.

b) Se Γ é inconsistente, então todo o subconjunto de Γ é inconsistente.

Não existe v valoração t.q. $v(\varphi)=1$ para todo $\varphi \in \Gamma$ (não é possível ter todas as fórmulas de Γ simultaneamente verdadeiras)

$\Gamma = \{p_0, p_1, \neg p_0\}$ inconsistente

$\Delta = \{p_0\}$ consistente

$\Delta \subseteq \Gamma$

Falso.

4. c) φ é contradição e $\Gamma \models \varphi$

$\Downarrow$

Γ é inconsistente

Hipóteses
1) φ contradição: $v(\varphi) = 0$ para qualquer valoração v
2) $\Gamma \models \varphi$: sempre que v satisfaz Γ temos $v(\varphi) = 1$

Suponhamos que Γ é consistente, então, existe valoração v que satisfaz Γ.
Para essa valoração, $v(\varphi) = 1$ (pela hipótese ②) mas isso contradiz a hipótese ①. Logo, inconsistente.

Verdadeira.