Universidade do Minho		30 de Abril de 2011
	Resolução do 1º Teste de **Lógica EI**	
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. Seja $X = \{0,1\}$ e seja $G \subseteq X^*$ o conjunto gerado pela seguinte definição indutiva:

$$\frac{}{1 \in G}\ (i) \qquad \frac{u \in G}{00u \in G}\ (ii) \qquad \frac{u \in G}{u1 \in G}\ (iii)$$

(a) Construa uma árvore de formação do elemento 0011 de G.

R: *Uma árvore de formação do elemento* 0011 *é a seguinte:*

$$\cfrac{\cfrac{\overline{1 \in G}\ (i)}{001 \in G}\ (ii)}{0011 \in G}\ (iii)$$

(b) A definição indutiva de G é determinista?

R: *Não. Se fosse determinista, cada elemento de G teria uma e uma só árvore de formação. Ora* 0011 *term duas árvores de formação: aquela indicada na alínea anterior e a seguinte:*

$$\cfrac{\cfrac{\overline{1 \in G}\ (i)}{11 \in G}\ (iii)}{0011 \in G}\ (ii)$$

(c) Enuncie o Teorema de Indução Estrutural para G.

R: *Seja $P(u)$ uma propriedade, com $u \in X^*$. Se*

(I) $P(1)$; e

(II) para todo $u \in X^*$, se $P(u)$ então $P(00u)$;e

(III) para todo $u \in X^*$, se $P(u)$ então $P(u1)$;

então: para todo $u \in G$, $P(u)$ é verdade.

(Uma versão alternativa é tomar $P(u)$ com $u \in G$, e quantificar em (II) e (III) sobre $u \in G$.)

(d) Seja $f : X^* \to X^*$ a função definida, para cada $u \in X^*$, por $f(u) = 0u$. Diga se G é fechado para f.

R: *G é não é fechado para f, pois existe $v \in G$ tal que $f(v) \notin G$. Basta tomar $v = 1$ ($v \in G$ segue da regra (i)). Vejamos que $f(v) \notin G$, ou seja $01 \notin G$. Por um lado, o número de ocorrências de 0 em 01 é impar; por outro lado, qualquer que seja $u \in G$, o número de ocorrências de 0 em u é par; segue que $01 \notin G$. (A prova de que o número de ocorrências de 0 em u é par, para todo $u \in G$, é por indução estrutural: percorrendo as regras da definição indutiva de G, observa-se que a propriedade de ter um número par de ocorrências de 0 é imediata em $u = 1$; e se se verifica na premissa u das regras (ii) ou (iii), verifica-se ainda nas respectivas conclusões).*

(Prova alternativa de que $01 \notin G$. Por redução ao absurdo. Suponhamos que $01 \in G$. Então 01 tem árvore de formação, que necessariamente termina com uma aplicação da regra (iii) (pois $01 \neq 1$ e 01 não tem 2 ocorrências de 0). Mas então 0 tem árvore de formação. Porém, nenhuma das regras (i), (ii), e (iii) permite concluir $0 \in G$. Absurdo. Deste modo, concluímos $01 \notin G$.)

2. Considere $f : \mathcal{F}^{CP} \to \{0,1\}$ a função definida recursivamente por:

(i)	$f(p_i) = 0 \quad (i \in \mathbb{N}_0)$.	(ii)	$f(\perp) = 0$.
(iii)	$f(\neg\varphi) = f(\varphi)^2$.	(iv)	$f(\varphi\Box\psi) = f(\varphi) \times f(\psi) \quad (\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\})$.

(a) Verifique que $f(\neg(\neg p_3 \to \perp)) = 0$.

R:

$$\begin{array}{rcll} f(\neg(\neg p_3 \to\perp)) & = & f(\neg p_3 \to\perp)^2 & \textit{(por (iii))} \\ & = & f(\neg p_3) \times f(\perp) & \textit{(por (iv))} \\ & = & f(\neg p_3) \times 0 & \textit{(por (ii))} \\ & = & 0 & \end{array}$$

(b) Prove por indução estrutural que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $f(\varphi) = 0$.

R: *Defina-se $P(\varphi)$ sse $f(\varphi) = 0$. Pelo Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, basta demonstrar as afirmações (I)-(IV) seguintes:*

(I) $P(p_i)$ $(i \in \mathbb{N}_0)$.

(II) $P(\perp)$.

(III) Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $P(\varphi)$ então $P(\neg\varphi)$.

(IV) Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, se $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ então $P(\varphi\Box\psi)$.

Passemos à demonstração destas afirmações.

(I) $f(p_i) = 0$ por (i) na def. de f.

(II) $f(\perp) = 0$ por (ii) na def. de f.

(III) Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $f(\varphi) = 0$ (HI). Então

$$\begin{array}{rcll} f(\neg\varphi) & = & f(\varphi)^2 & \textit{(por (iii) na def. de } f\textit{)} \\ & = & 0^2 & \textit{(por HI)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

(IV) Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tais que $f(\varphi) = f(\psi) = 0$ (HI). Então

$$\begin{array}{rcll} f(\varphi\Box\psi) & = & f(\varphi) \times f(\psi) & \textit{(por (iv) na def. de } f\textit{)} \\ & = & 0 \times 0 & \textit{(por HI)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

(c) Diga se f é uma valoração.

R: *f não é uma valoração. Se fosse uma valoração, ter-se-ia $f(\neg\varphi) = 1 - f(\varphi)$ para todo φ. Porém, esta igualdade é falsa, não apenas para algum φ, mas inclusivamente para qualquer φ: por um lado $f(\neg\varphi) = f(\varphi)^2 = 0^2 = 0$; por outro, $1 - f(\varphi) = 1 - 0 = 1$.*

3. Seja φ a seguinte fórmula do Cálculo Proposicional:

$$\varphi = (p_0 \to\perp) \vee (p_1 \leftrightarrow \neg p_2).$$

(a) Dê exemplo de uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

R: *Através de diversas equivalências lógicas estudadas, temos que:*

$$\begin{array}{rl} & \varphi \\ \Leftrightarrow & (\neg p_0 \vee \perp) \vee ((p_1 \to \neg p_2) \wedge (\neg p_2 \to p_1)) \\ \Leftrightarrow & \neg p_0 \vee ((\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg\neg p_2 \vee p_1)) \\ \Leftrightarrow & \neg p_0 \vee ((\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee p_1)) \\ \Leftrightarrow & (\neg p_0 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_0 \vee p_2 \vee p_1)) \end{array}$$

A última fórmula, sendo uma conjunção de disjunções de literais, é uma forma normal conjuntiva.

(b) Diga se $\varphi[(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)/p_0]$ é uma tautologia.

R: *Chamemos ψ à fórmula $(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)$. Efectuando a substituição, temos que $\varphi[\psi/p_0] = (\psi \rightarrow \perp) \vee (p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = (((p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)) \rightarrow \perp) \vee (p_1 \leftrightarrow \neg p_2)$. Construamos a tabela de verdade desta fórmula:*

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$p_1 \vee p_2$	$\neg p_1 \vee \neg p_2$	ψ	$\psi \rightarrow \perp$	$p_1 \leftrightarrow \neg p_2$	$\varphi[\psi/p_0]$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1

Verificamos assim que $\varphi[(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)/p_0]$ assume sempre o valor lógico 1, pelo que esta fórmula é uma tautologia.

(c) Verifique se $\neg(p_1 \wedge p_2)$ é consequência semântica de $\{\varphi, p_0\}$.

R: *Pretende-se verificar se $\varphi, p_0 \models \neg(p_1 \wedge p_2)$, ou seja, se para toda a valoração v tal que $v(\varphi) = 1$ e $v(p_0) = 1$ se tem que $v(\neg(p_1 \wedge p_2)) = 1$. Esta afirmação é verdadeira. De facto, quando $v(p_0) = 1$ e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$, teremos que ter $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$, pois $v(p_0 \rightarrow \perp) = 0$. De $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$, segue que $v(p_1) \neq v(p_2)$, donde um destes valores é necessariamente 0 e, como tal, $v(p_1 \wedge p_2) = 0$, pelo que $v(\neg(p_1 \wedge p_2)) = 1$.*

4. Considere as seguintes proposições:

- João gosta de computadores mas não usa óculos.
- Se João gosta de computadores, então usa óculos se e só se é engenheiro.
- João não é engenheiro ou usa óculos.

(a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

R: *Representemos por p_0 a frase atómica "João gosta de computadores", por p_1 a frase "João usa óculos" e por p_2 "João é engenheiro". Então, as três proposições acima exprimem-se respectivamente pelas fórmulas φ_1, φ_2 e φ_3 seguintes:*

$$\varphi_1 = p_0 \wedge \neg p_1, \qquad \varphi_2 = p_0 \rightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2) \qquad e \qquad \varphi_3 = \neg p_2 \vee p_1.$$

(b) Diga se as três proposições acima podem ser simultaneamente verdadeiras.

R: *As três proposições podem ser simultaneamente verdadeiras. De facto, φ_1 é verdadeira precisamente para as valorações v tais que $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = 0$ pois, neste caso,*

$$v(\varphi_1) = min\{v(p_0), v(\neg p_1)\} = min\{1, 1 - v(p_1)\} = min\{1, 1 - 0\} = 1.$$

Agora, dado que $v(p_0) = 1$, para se ter $v(\varphi_2) = 1$ é necessário e suficiente que $v(p_1 \leftrightarrow p_2) = 1$. Ora, sendo $v(p_1) = 0$ deduz-se que $v(p_2) = 0$. Provou-se assim que as valorações v tais que $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = v(p_2) = 0$ verificam $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = 1$. Ora, para estas valorações tem-se ainda

$$v(\varphi_3) = max\{v(\neg p_2), v(p_1)\} = max\{1 - v(p_2), 0\} = max\{1 - 0, 0\} = 1,$$

o que mostra que as três proposições acima podem ser simultaneamente verdadeiras.

Alternativamente, poderiam ser construídas as tabelas de verdade das fórmulas φ_1, φ_2 e φ_3 e poderia ser verificado por essas tabelas que existem valorações (precisamente aquelas para as quais p_0, p_1 e p_2 assumem os valores lógicos 1, 0 e 0 respectivamente) que atribuem o valor lógico 1 às três fórmulas.

5. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

(a) Se Γ é consistente e $\Gamma \models \varphi$, então φ não é uma contradição.

R: *Suponhamos que Γ é consistente e $\Gamma \models \varphi$. Note-se que a hipótese $\Gamma \models \varphi$ significa que, se v' é uma valoração tal que $v' \models \Gamma$, então $v' \models \varphi$. Ora, da consistência de Γ deduzimos que existe uma valoração v tal que $v \models \Gamma$. Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, resulta que $v \models \varphi$, isto é, que $v(\varphi) = 1$. Isto mostra que φ não é uma contradição pois para tal seria necessário que φ tivesse o valor lógico 0 para todas as valorações. Conclui-se assim que a afirmação é verdadeira.*

(b) $p_0 \vee \neg p_0 \models \varphi$ se e só se φ é uma tautologia.

R: *Como é evidente, a fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia. Ou seja, $v \models p_0 \vee \neg p_0$ para toda a valoração v. Logo, pela definição de uma fórmula ser consequência de um conjunto de fórmulas (ver resposta da alínea anterior), deduz-se imediatamente que $p_0 \vee \neg p_0 \models \varphi$ se e só se $v \models \varphi$ para toda a valoração v. Portanto, $p_0 \vee \neg p_0 \models \varphi$ se e só se φ é uma tautologia, donde a afirmação é verdadeira.*

(c) Se $\Gamma, p_0 \to p_2 \models p_0 \wedge p_2$, então Γ é inconsistente.

R: *Esta afirmação é falsa. Um contra-exemplo é fornecido, por exemplo, pelo conjunto $\Gamma = \{p_0\}$. De facto, tem-se que*

$$\Gamma, p_0 \to p_2 \models p_0 \wedge p_2$$

pois, se v é uma valoração tal que $v(p_0) = v(p_0 \to p_2) = 1$, então $v(p_2) = 1$ e, por conseguinte, $v(p_0 \wedge p_2) = 1$. No entanto Γ é consistente já que existem valorações que satisfazem p_0.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.
	1+1+1+1	1+2+1	1,5+1,5+1,5	1,5+1,5	1,5+1,5+1,5