Dep. Matem., Univ. Minho		6 de Maio de 2009
	Resolução do 1º Teste de **Lógica EI**	
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Este teste é constituído por 6 *questões.* ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. Seja X o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, *, (,)\}$ e seja G o conjunto gerado pela seguinte definição indutiva determinista sobre X.

$$\frac{}{a \in G}\ 1 \qquad \frac{x \in G}{xa \in G}\ 2 \qquad \frac{x \in G \quad y \in G}{(x * y) \in G}\ 3$$

Seja ainda $i : G \longrightarrow \mathbb{N}$ a única função que satisfaz as seguintes condições:

- $i(a) = 1$;
- $i(xa) = i(x) + 1$, para todo o $x \in G$;
- $i\big((x * y)\big) = i(x) + i(y)$, para todos os $x, y \in G$.

(a) Construa a árvore de formação do elemento $u = ((aa * a)a * a)$ de G.

R: *A árvore de formação de u é a seguinte*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a \in G}\,1}{aa \in G}\,2 \qquad \dfrac{}{a \in G}\,1}{(aa * a) \in G}\,3}{(aa * a)a \in G}\,2 \qquad \dfrac{}{a \in G}\,1}{((aa * a)a * a) \in G}\,3$$

(b) Indique um elemento de X que não pertence a G.

R: *Seja, por exemplo,* $v = aa)$*. É claro que* v *é um elemento de* X *pois é uma sequência finita de letras do alfabeto* $\{a, *, (,)\}$*. Por outro lado* v *não pertence a* G*. De facto, dado que a última letra de* v *é* $)$ *e a única regra que tem como conclusão uma palavra que acaba por* $)$ *é a terceira, para* v *pertencer a* G *teria que ser conclusão de alguma instância*

$$\frac{x \in G \quad y \in G}{v \in G}\ 3$$

da regra 3*. Ora tal é impossível pois nesse caso a primeira letra de* v *teria que ser* $($*, o que não acontece.*

(c) Calcule $i(u)$.

R: *Denotemos por* $(i.1)$*,* $(i.2)$ *e* $(i.3)$ *respectivamente a primeira, a segunda e a terceira condições da definição da função* i*. Tem-se*

$$\begin{aligned}
i(u) &= i\big(((aa * a)a * a)\big) \\
&= i\big((aa * a)a\big) + i(a) \qquad \textit{por } (i.3) \\
&= i\big((aa * a)\big) + 1 + 1 \qquad \textit{por } (i.1) \textit{ e } (i.2) \\
&= i(aa) + i(a) + 2 \qquad \textit{por } (i.3) \\
&= i(a) + 1 + 1 + 2 \qquad \textit{por } (i.1) \textit{ e } (i.2) \\
&= 1 + 4 \qquad \textit{por } (i.1) \\
&= 5.
\end{aligned}$$

(d) Enuncie o teorema de indução estrutural para G.

R: *O Princípio de Indução Estrutural para G pode ser enunciado da seguinte forma.*

Seja $P(x)$ uma propriedade relativa aos elementos $x \in G$ e suponhamos que:

(1) *$P(a)$ é verdadeira;*

(2) *para qualquer $x \in G$, se $P(x)$ é verdadeira, então $P(xa)$ é verdadeira;*

(3) *para quaisquer $x, y \in G$, se $P(x)$ e $P(y)$ são verdadeiras, então $P\big((x * y)\big)$ é verdadeira.*

Então $P(x)$ é verdadeira, para todo o $x \in G$.

(e) Mostre que, para todo o $x \in G$, $i(x)$ é o número de ocorrências da letra a na palavra x.

R: *A prova será feita por indução estrutural sobre G. Para cada $x \in G$, denotemos por $|x|_a$ o número de ocorrências da letra a na palavra x e seja $P(x)$ a afirmação $i(x) = |x|_a$.*

(1) *$P(a)$ é a afirmação $i(a) = |a|_a$. Ora, $i(a) = 1$ por $(i.1)$, e como é evidente $|a|_a = 1$. Logo, $P(a)$ é verdadeira.*

(2) *Seja $x \in G$ e suponhamos, por hipótese de indução (H.I.), que $P(x)$ é válida. Ou seja, suponhamos que se tem $i(x) = |x|_a$. Queremos provar que $P(xa)$ é válida, i.e., que se tem $i(xa) = |xa|_a$. Ora $i(xa) = i(x) + 1$ por $(i.2)$, e claramente $|xa|_a = |x|_a + 1$. Logo, pode-se deduzir*

$$\begin{aligned} i(xa) &= i(x) + 1 \\ &= |x|_a + 1 \qquad \text{por (H.I.)} \\ &= |xa|_a. \end{aligned}$$

Portanto $P(xa)$ é verdadeira.

(3) *Sejam $x, y \in G$ e suponhamos, por hipótese de indução (H.I.), que $P(x)$ e $P(y)$ são verdadeiras. Ou seja, suponhamos que se tem $i(x) = |x|_a$ e $i(y) = |y|_a$. Queremos provar que se verifica $P\big((x * y)\big)$, i.e., que se tem $i\big((x * y)\big) = |(x * y)|_a$. Ora*

$$\begin{aligned} i\big((x * y)\big) &= i(x) + i(y) \qquad \text{por } (i.3) \\ &= |x|_a + |y|_a \qquad \text{por (H.I.)} \\ &= |(x * y)|_a. \end{aligned}$$

Logo $P\big((x * y)\big)$ é verdadeira.

Mostramos assim que as condições (1), (2) e (3) do Princípio de Indução Estrutural para G são válidas. Logo, por esse Princípio, conclui-se que $P(x)$ é verdadeira para todo o $x \in G$, ou seja, que $i(x)$ é o número de ocorrências da letra a na palavra x para todo o $x \in G$.

2. Sejam φ, ψ e σ as seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

$$\begin{aligned} &\psi = p_1 \to p_2 \\ &\sigma = p_0 \vee \neg p_2 \\ &\varphi = p_0 \to (p_1 \vee p_2) \end{aligned}$$

(a) Dê exemplo de uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$.

R: *Usando as propriedades da equivalência lógica, pode-se deduzir sucessivamente*

$$\begin{aligned} (\psi \wedge \sigma) \to \varphi &\Leftrightarrow \neg(\psi \wedge \sigma) \vee \varphi \\ &\Leftrightarrow \neg\psi \vee \neg\sigma \vee \varphi \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_2) \vee \neg p_0 \vee p_1 \vee p_2 \\ &\Leftrightarrow (\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg\neg p_2) \vee \neg p_0 \vee p_1 \vee p_2 \\ &\Leftrightarrow (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_2) \vee \neg p_0 \vee p_1 \vee p_2. \end{aligned}$$

Logo, $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_2) \vee \neg p_0 \vee p_1 \vee p_2$ é uma forma normal disjuntiva (FND) logicamente equivalente a $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$.

Alternativamente, poderíamos determinar uma outra FND através da tabela de verdade da fórmula $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$, que apresentamos de seguida,

p_0	p_1	p_2	ψ	σ	φ	$(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

As linhas para as quais $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$ tem valor lógico 1 são todas excepto a 4ª. Portanto uma FND logicamente equivalente a $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$ é

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3).$$

(b) Diga se $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$ é uma tautologia.

R: *A fórmula $(\psi \wedge \sigma) \to \varphi$ não é uma tautologia como se pode verificar pela sua tabela de verdade. De facto, para as valorações v tais que $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = v(p_2) = 0$ tem-se $v\big((\psi \wedge \sigma) \to \varphi\big) = 0$.*

(c) Verifique se o conjunto $\{\psi, \sigma \wedge \neg\varphi\}$ é semanticamente consistente.

R: *O conjunto $\{\psi, \sigma \wedge \neg\varphi\}$ é semanticamente consistente pois existe pelo menos uma valoração que o satisfaz. Por exemplo, para qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = v(p_2) = 0$ tem-se $v(\psi) = v(\sigma) = 1$ e $v(\varphi) = 0$ e, portanto, $v(\psi) = v(\sigma \wedge \neg\varphi) = 1$.*

3. Considere as seguintes proposições:

- A lógica é difícil ou não há muitos estudantes que gostam dela, e se a matemática é fácil então a lógica não é difícil.
- Se há muitos estudantes que gostam de lógica, então a matemática não é fácil.

(a) Exprima as duas proposições acima através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

R: *Representemos por p_0 a frase atómica "A lógica é difícil", por p_1 a frase "Há muitos estudantes que gostam de lógica" e por p_2 "A matemática é fácil". Então as duas proposições acima exprimem-se respectivamente pelas fórmulas*

$$(p_0 \vee \neg p_1) \wedge (p_2 \to \neg p_0) \qquad e \qquad p_1 \to \neg p_2.$$

(b) Diga, justificando, se a segunda proposição é ou não uma consequência da primeira.

R: *Pretende-se verificar se*

$$(p_0 \vee \neg p_1) \wedge (p_2 \to \neg p_0) \models p_1 \to \neg p_2.$$

Denotemos $\varphi = (p_0 \vee \neg p_1) \wedge (p_2 \to \neg p_0)$ e $\psi = p_1 \to \neg p_2$. Analisando a tabela

p_0	p_1	p_2	φ	ψ
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

verifica-se que sempre que φ assume o valor lógico 1 (ou seja para as valorações dadas pelas 2ª, 4ª, 7ª e 8ª linhas) a fórmula ψ assume o mesmo valor. Logo a afirmação é verdadeira, i.e., a segunda proposição é uma consequência da primeira.

4. Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{F}^{CP}$. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

   (a) Se $\neg\varphi \lor (\psi \to \sigma)$ é uma tautologia, então $\psi \to (\varphi \to \sigma)$ é uma tautologia.

   R: *Esta afirmação é verdadeira. De facto, suponhamos que $\neg\varphi \lor (\psi \to \sigma)$ é uma tautologia e consideremos uma valoração v qualquer.*

   - *Se $v(\varphi) = 0$, então $v(\varphi \to \sigma) = 1$ e portanto $v\big(\psi \to (\varphi \to \sigma)\big) = 1$.*
   - *Suponhamos agora que $v(\varphi) = 1$, donde $v(\neg\varphi) = 0$. Dado que $\neg\varphi \lor (\psi \to \sigma)$ é uma tautologia, tem-se então que $v(\psi \to \sigma) = 1$. Se $v(\psi) = 0$, então resulta imediatamente que $v\big(\psi \to (\varphi \to \sigma)\big) = 1$. Se $v(\psi) = 1$, então $v(\sigma) = 1$ donde resulta que $v\big(\varphi \to \sigma\big) = 1$ e daí $v\big(\psi \to (\varphi \to \sigma)\big) = 1$.*

   Provou-se assim que $\psi \to (\varphi \to \sigma)$ é uma tautologia.

   (b) Se ψ é uma contradição e $\Gamma \models \varphi \to \psi$, então φ é uma contradição.

   R: *A afirmação é falsa. Um contra-exemplo é obtido, por exemplo, considerando*

   $$\psi = p_0 \land \neg p_0, \;\; \varphi = p_1 \;\text{ e }\; \Gamma = \{p_1 \to (p_0 \land \neg p_0)\}.$$

   De facto, $p_0 \land \neg p_0$ é uma contradição e, evidentemente, $p_1 \to (p_0 \land \neg p_0) \models p_1 \to (p_0 \land \neg p_0)$. No entanto p_1 não é uma contradição.

5. Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{F}^{CP}$. Mostre que, se $\Gamma \models \psi \lor \neg\sigma$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi \to \psi\}$ é semanticamente inconsistente, então $\Gamma \models \sigma \to \varphi$.

R: *Suponhamos que $\Gamma \models \psi \lor \neg\sigma$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi \to \psi\}$ é semanticamente inconsistente. Temos de provar que todas as valorações que satisfazem Γ também satisfazem a fórmula $\sigma \to \varphi$.*

Seja v uma valoração tal que $v \models \Gamma$, ou seja, tal que $v(\gamma) = 1$ para toda a fórmula $\gamma \in \Gamma$. Então $v(\psi \lor \neg\sigma) = 1$ pois, por hipótese, $\Gamma \models \psi \lor \neg\sigma$. Por outro lado $v(\neg\varphi \to \psi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi \to \psi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde resultaria que $\Gamma \cup \{\neg\varphi \to \psi\}$ seria semanticamente consistente, o que não se verifica por hipótese. Agora, de $v(\neg\varphi \to \psi) = 0$ deduz-se que $v(\psi) = 0$, o que em simultâneo com $v(\psi \lor \neg\sigma) = 1$ permite concluir que $v(\sigma) = 0$. Daqui resulta que $v(\sigma \to \varphi) = 1$ e a demonstração fica completa.

6. Sejam φ, ψ e σ fórmulas do Cálculo Proposicional. Construa uma derivação em DNP de uma (e uma só) das fórmulas seguintes:

$$\bot \leftrightarrow (\varphi \land \neg\varphi) \qquad \text{ou} \qquad (\varphi \to \psi) \to \neg(\varphi \land \neg\psi).$$

R: *A árvore seguinte é uma derivação em DNP da fórmula $\bot \leftrightarrow (\varphi \land \neg\varphi)$.*

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\bot}^{(1)}}{\varphi \land \neg\varphi}\,(\bot) \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \land \neg\varphi}^{(1)}}{\varphi}\,\land_1 E \quad \dfrac{\cancel{\varphi \land \neg\varphi}^{(1)}}{\neg\varphi}\,\land_2 E}{\bot}\,\neg E}{\bot \leftrightarrow (\varphi \land \neg\varphi)}\,\leftrightarrow I^{(1)}$$

A árvore seguinte é uma derivação em DNP da fórmula $(\varphi \to \psi) \to \neg(\varphi \land \neg\psi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \land \neg\psi}^{(2)}}{\varphi}\,\land_1 E \quad \cancel{\varphi \to \psi}^{(1)}}{\psi}\,\to E \qquad \dfrac{\cancel{\varphi \land \neg\psi}^{(2)}}{\neg\psi}\,\land_2 E}{\bot}\,\neg E}{\neg(\varphi \land \neg\psi)}\,\neg I^{(2)}}{(\varphi \to \psi) \to \neg(\varphi \land \neg\psi)}\,\to I^{(1)}$$

(Fim)

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Cotações	1.5+1+1.5+1+2	1.5+1+1.5	1+1.5	1.5+1.5	1.5	2