Universidade do Minho	1º Teste de **Lógica EI**	28 de Abril de 2010
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas (se nada for dito em contrário).*

1. Seja X^* o conjunto das palavras sobre o alfabeto $X = \mathbb{Z} \cup \{+, -, (,), ,\}$ e seja G o conjunto gerado pela seguinte definição indutiva determinista sobre X^*.

$$\frac{}{n \in G}\ n \quad (n \in \mathbb{Z}) \qquad\qquad \frac{x \in G}{-(x) \in G}\ - \qquad\qquad \frac{x \in G \quad y \in G}{+(x,y) \in G}\ +$$

Seja ainda $v : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ a única função que satisfaz as seguintes condições:

- $v(n) = n$, para todo o $n \in \mathbb{Z}$;
- $v(-(x)) = -v(x)$, para todo o $x \in G$;
- $v(+(x,y)) = v(x) + v(y)$, para todos os $x, y \in G$.

(a) Construa a árvore de formação do elemento $u = -(+(+(3,42), -(12)))$ de G.

(b) Indique, sem justificar, um elemento de X^* que não pertence a G.

(c) Calcule $v(u)$.

2. Considere a função $nv : \mathcal{F}^{CP} \to \mathbb{N}_0$ tal que, para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $nv(\varphi)$ é o número de ocorrências de variáveis em φ.

(a) Defina a função nv por recursão estrutural.

(b) Prove por indução que, para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $nv(\varphi[\bot/p_0]) \leq nv(\varphi)$.

3. Sejam φ e ψ as seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

$$\varphi = (\neg p_0 \vee (p_1 \wedge p_0)) \to (p_2 \to p_1), \qquad \psi = p_1 \leftrightarrow \neg p_0.$$

(a) Dê exemplo de uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ.

(b) Diga se $\neg\varphi \wedge \psi$ é uma contradição.

(c) Verifique se ψ é consequência semântica de $\{\varphi, p_2\}$.

4. Considere as seguintes proposições:

- Eça ama Elsa só se Elsa gosta de mousse Alsa.
- Elsa não gosta de mousse Alsa ou Eça gosta de mousse Alsa.
- Eça ama Elsa e Eça não gosta de mousse Alsa.

(a) Exprima as três proposições acima através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

(b) Mostre que é impossível as três proposições acima serem simultaneamente verdadeiras.

5. Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma = \{\varphi, \psi\}$. Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

(a) Se Γ é consistente, então φ não é logicamente equivalente a $\neg\psi$.

(b) Se φ não é logicamente equivalente a $\neg\psi$, então Γ é consistente.

(c) Se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\Gamma \models \sigma$, então $\varphi \models \sigma$.

(d) Se $(\neg\psi \vee \varphi) \to \psi$ é uma tautologia, então ψ é uma tautologia.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.
	1,5+1+1,5	1,5+2	1,5+1+1,5	1+1,5	1,5+1,5+1,5+1,5