Universidade do Minho — LCC

Dep. de Matemática e Aplicações — 2018/2019

# Lógica CC

exame de recurso A | 17 de janeiro de 2019 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ______________

## Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

| | | V | F |
|---|---|---|---|
| 1. | A fórmula $(p_0 \to (p_1 \wedge p_2))[(p_1 \wedge p_2)/p_0]$ admite sequências de formação mais curtas do que a fórmula $(p_0 \to (p_1 \wedge p_2))$. | □ | □ |
| 2. | Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi$ é forma normal disjuntiva e $\psi \wedge \sigma$ é subfórmula de $\varphi$, então $\psi$ e $\sigma$ são literais. | □ | □ |
| 3. | Para qualquer $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ que seja maximalmente consistente, se $p_1 \to p_2 \in \Gamma$ e $p_2 \in \Gamma$, então $\neg p_1 \notin \Gamma$. | □ | □ |
| 4. | Para qualquer tipo de linguagem com um símbolo de relação binário $\mathsf{R}$, $x_0$ é substituível sem captura de variáveis por qualquer $L$-termo em $\neg\mathsf{R}(x_1, x_0) \wedge \exists x_1 \mathsf{R}(x_0, x_1)$. | □ | □ |
| 5. | Para quaisquer tipo de linguagem $L$, $L$-fórmulas $\varphi, \psi$ e variável $x$, se $\varphi$ e $\psi$ são ambas instâncias de tautologias, então $\forall x(\varphi \wedge \psi)$ é universalmente válida. | □ | □ |
| 6. | Para qualquer tipo de linguagem com símbolos de relação unários $\mathsf{R}$ e $\mathsf{Q}$, $\forall x_0 \mathsf{R}(x_0) \vee \forall x_1 \mathsf{Q}(x_1) \vdash \forall x_0(\mathsf{R}(x_0) \vee \mathsf{Q}(x_0))$. | □ | □ |

## Grupo II

Nas questões 1(a), 4(a), 4(b), 4(c) e 5 apresente a sua resposta no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das fórmulas proposicionais definido indutivamente pelas seguintes regras:

   (i) $(p_i \wedge p_j) \in \mathcal{F}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$ e para todo $j \in \mathbb{N}_0$;

   (ii) se $\varphi \in \mathcal{F}$, então $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

   (iii) se $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\psi \in \mathcal{F}$, então $(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

   (iv) se $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\psi \in \mathcal{F}$, então $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

   (a) Indique uma fórmula $\varphi$ que pertença a este conjunto $\mathcal{F}$ e tal que $\varphi \Leftrightarrow \neg p_1 \vee (p_2 \wedge p_3)$. Justifique.
   Resposta:

(b) Mostre, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

2. Sejam $\varphi$, $\psi$ e $\sigma$ fórmulas do Cálculo Proposicional. Prove que: se $\varphi \models \psi \vee \sigma$ e $\{\varphi, \psi\}$ é inconsistente, então $\varphi \to \sigma$ é tautologia.

3. Construa uma derivação em DNP que mostre que $p_1 \to \perp \vdash \neg p_0 \to \neg(p_0 \vee p_1)$.

4. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{=, \mathsf{P}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$. Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{\phantom{x}})$ a $L$-estrutura tal que:

$$\overline{\mathsf{c}} = 0; \qquad \overline{=} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : z_1 = z_2\};$$
$$\overline{\mathsf{f}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{\mathsf{f}}(z) = |z|; \qquad \overline{\mathsf{P}} = \{z \in \mathbb{Z} : z > 0\}.$$

(a) Indique todos os pares de $L$-termos $t_1$ e $t_2$ tais que $\mathrm{VAR}(t_1) \neq \emptyset$ e $t_1[t_2/x_0] = \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{c}))$.

**Resposta:**

(b) Calcule $\forall x_0((\mathsf{f}(x_0) = \mathsf{f}(x_1) \wedge \neg(x_0 = x_1)) \to (\mathsf{P}(x_0) \wedge \neg \mathsf{P}(x_1)))[a]_E$, sendo $a$ a atribuição em $E$ tal que $a(x_i) = -i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Justifique.

**Resposta:**

(c) Indique, sem justificar, uma $L$-fórmula válida em $E$ que represente a afirmação: Todo o número que seja igual ao seu valor em módulo é um número positivo ou zero.

**Resposta:**

5. Sejam $L$ um tipo de linguagem, $\varphi, \psi$ $L$-fórmulas e $x, y$ variáveis tais que $x \notin LIV(\psi)$. Prove que se $\varphi \to \psi$ é universalmente válida, então $\exists x \varphi \models \exists y(\exists x \varphi \wedge \psi)$.

**Resposta:**

| Cotações | I | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | II.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 1,75+2 | 1,75 | 1,75 | 1,75+1,75+1,5 | 1,75 |