Universidade do Minho — LCC
Dep. de Matemática e Aplicações — 2016/2017

Lógica CC

exame de recurso A | 31 de janeiro de 2017 — duração: 2 horas

nome: ____________________ número ____________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, qualquer sequência de formação da fórmula $(p_0 \to p_1)[\varphi/p_0]$ tem, pelo menos, três elementos.	☐	☐
2.	Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se φ e ψ são ambas formas normais conjuntivas, então $\varphi \wedge \psi$ é uma forma normal conjuntiva.	☐	☐
3.	Para qualquer $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, se Γ é maximalmente consistente e $\{p_1, p_2\} \subset \Gamma$, então $p_1 \vee \neg p_2 \in \Gamma$.	☐	☐
4.	Para todo o tipo de linguagem com um símbolo de relação binário R, x_1 é substituível sem captura de variáveis por qualquer L-termo em $\neg\mathsf{R}(x_1, x_0) \wedge \exists x_1 \exists x_0 \mathsf{R}(x_0, x_1)$.	☐	☐
5.	Para todo o tipo de linguagem L com um símbolo de relação unário R, a L-fórmula $\neg(\exists x_0 \mathsf{R}(x_0) \wedge \neg\exists x_0 \mathsf{R}(x_0))$ não é instância de tautologias.	☐	☐
6.	Para todo o tipo de linguagem com símbolos de relação unários R e Q, $\exists x_0 \mathsf{R}(x_0), \exists x_0 \mathsf{Q}(x_0) \vdash \exists x_0(\mathsf{R}(x_0) \wedge \mathsf{Q}(x_0))$.	☐	☐

Grupo II

Nas questões 1(a), 4(a), 4(b), 4(c) e 5 apresente a sua resposta no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das fórmulas proposicionais definido indutivamente pelas seguintes regras:

   i) $p_i \in \mathcal{F}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

   ii) se $\varphi \in \mathcal{F}$, então $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

   iii) se $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\psi \in \mathcal{F}$, então $(\varphi \to \psi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

   iv) se $\varphi \in \mathcal{F}$ e $\psi \in \mathcal{F}$, então $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

   (a) Indique uma fórmula φ que pertença a este conjunto $\mathcal{F}$ e tal que $\varphi \Leftrightarrow (p_1 \vee \perp) \wedge p_2$. Justifique.

   Resposta:

(b) Mostre, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

2. Sejam φ, ψ e σ fórmulas do Cálculo Proposicional. Prove que: se $\varphi \models \psi \wedge \sigma$, então φ é contradição ou $\{\varphi, \psi, \sigma\}$ é consistente.

3. Construa uma derivação em DNP que mostre que $p_0 \leftrightarrow p_2 \vdash (p_1 \to p_2) \to ((p_0 \vee p_1) \to p_2)$.

4. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{=, \mathsf{R}\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(\mathsf{R}) = 2$. Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

$$\begin{array}{ll} \bar{\mathsf{c}} = 0; & \bar{=} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : z_1 = z_2\}; \\ \bar{\mathsf{f}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \bar{\mathsf{f}}(z) = z^2; & \bar{\mathsf{R}} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : z_1 < z_2\}. \end{array}$$

(a) Indique todos os L-termos t tais que t tem exatamente três subtermos e $\mathrm{VAR}(t) \subseteq \{x_0\}$, apresentando as sequências de formação desses L-termos.

Resposta:

(b) Indique $\forall x_0((\mathsf{f}(x_0) = \mathsf{f}(x_1) \wedge \neg(x_0 = x_1)) \to \mathsf{R}(x_0, \mathsf{c}))[a]_E$, sendo a a atribuição em E tal que $a(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Justifique.

Resposta:

(c) Indique, sem justificar, uma L-fórmula válida em E que represente a afirmação: O quadrado de qualquer inteiro negativo é positivo.

Resposta:

5. Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ L-fórmulas e x uma variável tal que $x \notin LIV(\psi)$. Prove que se $(\varphi \to \psi) \wedge \exists x \varphi$ é universalmente válida, então ψ é universalmente válida.

Resposta:

Cotações	I	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5
	6	1,75+2	1,75	1,75	1,75+1,75+1,5	1,75