Universidade do Minho		11 de Julho de 2014
	Exame de **Lógica EI**	
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. Considere o conjunto $\Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, definido indutivamente pelas seguintes regras:

   1. $\neg\perp \in \Delta$.
   2. Para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $p_i \wedge \neg p_{i+1} \in \Delta$.
   3. Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \in \Delta$ e $\psi \in \Delta$, então $\neg\varphi \to \neg\psi \in \Delta$.

   (a) Diga, justificando, se a fórmula $\neg\neg\perp \to \neg(p_3 \wedge \neg p_4)$ pertence ao conjunto Δ.

   (b) Indique $\varphi, \psi \in \Delta$ tais que $\{\varphi, \psi\}$ seja semanticamente inconsistente. Justifique.

   (c) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para Δ.

   (d) Prove por indução estrutural que: para todo $\varphi \in \Delta$, existe uma valoração v que satisfaz φ.

2. Apresente uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente à fórmula do Cálculo Proposicional $(p_1 \to p_2) \wedge (\neg p_1 \to (p_2 \to \perp))$. Justifique.

   $\{\Gamma, \varphi\psi$

3. Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que: se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é consistente, então ψ não é contradição.

4. Seja $\varphi = p_0 \leftrightarrow p_1$.

   (a) Construa uma derivação em DNP demostrando que $\varphi \vdash \neg p_0 \to \neg p_1$.

   (b) Demonstre que $\varphi \nvdash p_0 \vee p_1$.

5. Seja L o tipo de linguagem $(\{\mathsf{c}, \mathsf{f}, +\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = \mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$, $\mathcal{N}(+) = \mathcal{N}(<) = 2$.

   (a) Dê exemplo de um L-termo que use os símbolos c, f e $+$. Justifique.

   (b) Defina por recursão estrutural a função $s : \mathcal{T}_L \to \mathcal{P}(\{\mathsf{c}, \mathsf{f}, +\})$ que a cada L-termo t faz corresponder o conjunto dos símbolos de função que ocorrem em t.

   (c) Seja $E = (\mathbb{N}_0, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

   $$\begin{array}{ll} \overline{\mathsf{c}} = 2 & \overline{\mathsf{P}} = \{n \in \mathbb{N}_0 : \ n \text{ é par}\} \\ \overline{\mathsf{f}} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \text{ tal que } \overline{\mathsf{f}}(n) = 5n & \overline{<} = \{(m,n) \in \mathbb{N}_0^2 : m < n\} \\ \overline{+} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0 \text{ tal que } \overline{+}(m,n) = m + n & \end{array}$$

   Seja φ a L-fórmula $\forall x_0\,(\mathsf{P}(x_0) \to \mathsf{P}(\mathsf{c} + \mathsf{f}(x_0)))$. Mostre que

   i. $E \models \varphi$.

   ii. φ não é universalmente válida.

   (d) Indique, sem justificar, uma L-fórmula válida em E que represente a afirmação "A soma de quaisquer dois pares é menor que algum ímpar".

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.
	1,75+1,75+1+1,5	1,75	1,5	1,75+1,5	1,5+1,5+3+1,5