Universidade do Minho	Exame de	4 de Julho de 2013
	Lógica EI	
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. Considere o conjunto $\Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, definido indutivamente pelas seguintes regras:

   1. $\neg p_n \in \Delta$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.
   2. Se $\varphi \in \Delta$, então $\neg\neg\varphi \in \Delta$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.
   3. Se $\varphi \in \Delta$ e $\psi \in \Delta$, então $\varphi \leftrightarrow \neg\psi \in \Delta$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

   (a) Justificando, diga se a fórmula $\neg\neg\neg p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_1$ pertence ao conjunto Δ.

   (b) Prove que o subconjunto de Δ dado por $\Gamma = \{\neg p_0, \neg\neg\neg p_1, \neg p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_2\}$ é consistente.

   (c) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para Δ.

   (d) Seja v a valoração tal que $v(p_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Prove por indução estrutural que, para toda a fórmula $\varphi \in \Delta$, $v(\varphi) = 0$.

   (e) Justificando, diga se existe alguma tautologia em Δ.

2. Apresente uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente à fórmula do Cálculo Proposicional $(p_0 \vee \neg(p_1 \to p_0)) \wedge (p_1 \vee \perp)$.

3. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, se $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$, então $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ é consistente.

   (b) $p_0 \wedge \neg p_1 \nvdash \neg(p_1 \to p_0)$.

4. Construa uma derivação em DNP mostrando que $p_1 \to (p_2 \to p_3) \vdash (p_1 \wedge p_2) \to p_3$.

5. Seja L o tipo de linguagem $(\{2, \times\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(2) = 0$ e $\mathcal{N}(\times) = \mathcal{N}(=) = \mathcal{N}(<) = 2$.

   (a) Considere a função $h : \mathcal{T}_L \to \mathcal{T}_L$ tal que $h(t) = t[2 \times x_1/x_0]$, para todo $t \in \mathcal{T}_L$.

      i. Seja t o termo $(2 \times x_0) \times (2 \times x_1)$. Determine $h(t)$ e $\mathrm{VAR}(h(t))$.

      ii. Defina h por recursão estrutural.

      iii. Seja ψ a L-fórmula $\forall x_0(x_0 < x_1 \to \neg(x_0 = x_1))$. Para todo $t \in \mathcal{T}_L$, x_1 é substituível por $h(t)$ em ψ. Porquê?

   (b) Seja $E = (\mathbb{Q}, \bar{\ })$ a L-estrutura tal que:

   $$\bar{2} = 2 \qquad \bar{<} = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$$
   $$\bar{\times} : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q} \text{ tal que } \bar{\times}(x, y) = x \times y \qquad \bar{=} = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x = y\}$$

   Seja φ a L-fórmula $\neg\exists x_0\,(x_0 \times x_0 = 2)$.

   Quais das seguintes duas afirmações são verdadeiras?

   (i) $E \models \varphi$. (ii) $\nvDash \varphi$.

   (c) Indique, sem justificar, uma L-fórmula que represente a afirmação "O produto de qualquer número racional por si próprio é menor ou igual a 2".

6. Sejam L tipo de linguagem, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x arbitrários. Mostre que $\forall x\varphi. \forall x(\varphi \to \psi) \models \exists x\psi$.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.
	1,5+1,5+1+1,5+1	1,5	1,5+1,5	1,5	3+2,5+1	1

EXAME DE LÓGICA EI

4 julho 2013

1.

(a)

$\neg p_0, \neg p_1, \neg\neg\neg p_0, \neg\neg\neg p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_1$ é uma sequência de formação de $\neg\neg\neg p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_1$. Logo, $\neg\neg\neg p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_1 \in \Delta$.

(OBS: $\neg p_0 \in \Delta$ por 1.; como $\neg p_0 \in \Delta$, $\neg\neg\neg p_0 \in \Delta$ por 2.; $\neg p_1 \in \Delta$ por 1.; como $\neg\neg\neg p_0 \in \Delta$ e $\neg p_1 \in \Delta$, $\neg\neg\neg p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_1 \in \Delta$ por 3.)

(b) $\Gamma = \{\neg p_0, \neg\neg\neg p_1, \neg p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_2\}$ é consistente se existe uma valoração v tal que $v(\neg p_0) = v(\neg\neg\neg p_1) = v(\neg p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_2) = 1$.

Temos que, dada uma valoração v,

$$v(\neg p_0) = 1 \iff v(p_0) = 0$$

$$v(\neg\neg\neg p_1) = 1 \iff v(p_1) = 0$$

e $$v(\neg p_0 \leftrightarrow \neg\neg p_2) = 1 \iff v(\neg p_0) = v(\neg\neg p_2)$$

$$\iff v(\neg p_0) = v(p_2)$$

Logo, se v é uma valoração tal que $v(p_0) = v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 1$, então v satisfaz Γ. Γ é, portanto, consistente.

(c) Seja $P(\varphi)$ uma propriedade sobre os elementos φ de Δ. Se

(1) $P(\neg p_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$;

(2) se $P(\varphi)$ então $P(\neg\neg\varphi)$, para todo $\varphi \in \Delta$;

(3) se $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ então $P(\varphi \leftrightarrow \neg\neg\psi)$, para quaisquer $\varphi, \psi \in \Delta$;

então $P(\varphi)$ para todo $\varphi \in \Delta$.

(d) Seja $P(\varphi)$ a propriedade $v(\varphi)=0$ sobre os elementos φ de Δ.

(1) Temos que

$$v(\neg p_n) = 1 - v(p_n) = 1-1=0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Logo, $P(\neg p_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(2) Seja $\varphi \in \Delta$ tal que $P(\varphi)$, i.e., $v(\varphi)=0$. (HI)
Pretendemos mostrar que $v(\neg\neg\varphi)=0$. Ora,

$$\begin{aligned} v(\neg\neg\varphi) &= 1 - v(\neg\varphi) \\ &= 1 - (1 - v(\varphi)) = v(\varphi) \\ &\underset{HI}{=} 0 \end{aligned}$$

Logo, $P(\neg\neg\varphi)$.

(3) Sejam $\varphi, \psi \in \Delta$ tais que $P(\varphi)$ e $P(\psi)$, ou seja,
$v(\varphi)=0$ e $v(\psi)=0$ (HI).

Mostremos que $v(\varphi \leftrightarrow \neg\psi)=0$.

Como $v(\varphi) \underset{HI}{=} 0$ e $v(\neg\psi) = 1 - v(\psi) \underset{HI}{=} 1-0=1$,

temos que $v(\varphi \leftrightarrow \neg\psi)=0$. Logo, $P(\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$.

Por (1), (2), (3) e pelo Princípio de Indução Estrutural para Δ, $v(\varphi)=0$, para toda a fórmula $\varphi \in \Delta$.

(e) Atendendo à alínea (d), v é uma valoração que atribui o valor lógico 0 a todas as fórmulas de Δ. Logo, nenhuma fórmula de Δ é uma tautologia.

2. Sabemos que

$$(p_0 \vee \neg(p_1 \to p_0)) \wedge (p_1 \vee \bot) \overset{\neg(\varphi\to\psi) \Leftrightarrow \neg\varphi\wedge\psi}{\Longleftrightarrow} (p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)) \wedge (p_1 \vee \bot)$$

$$\overset{\bot \text{ elemento neutro } \vee}{\Longleftrightarrow} (p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)) \wedge p_1$$

$$\underset{\text{distributividade}}{\Longleftrightarrow} (p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \vee \neg p_0) \wedge p_1 .$$

Assim, $(p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \vee \neg p_0) \wedge p_1$ é uma FNC logicamente equivalente a $(p_0 \vee \neg(p_1 \to p_0)) \wedge (p_1 \vee \bot)$.

3.

a) Sejam $\Gamma = \{p_0, \neg p_0\}$, $\varphi = p_1$ e $\psi = p_2$.

Γ é obviamente inconsistente. Por isso, $\Gamma \models \sigma$ para qualquer $\sigma \in \mathcal{F}^{CP}$. Em particular, $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$. Como $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ e Γ é inconsistente, também $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ é inconsistente.

Logo, a afirmação é falsa.

b) Pelo Teorema da Adequação, sabemos que $p_0 \wedge \neg p_1 \not\vdash \neg(p_1 \to p_0)$ se e só se $p_0 \wedge \neg p_1 \not\models \neg(p_1 \to p_0)$.

Seja v uma valoração tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = 0$. Então, $v(p_0 \wedge \neg p_1) = 1$ e $v(\neg(p_1 \to p_0)) = 0$. Logo, $p_0 \wedge \neg p_1 \not\models \neg(p_1 \to p_0)$ e, por conseguinte, $p_0 \wedge \neg p_1 \not\vdash \neg(p_1 \to p_0)$.

4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1 \wedge p_2}^{(1)}}{p_2}\,\wedge_2 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_1 \wedge p_2}^{(1)}}{p_1}\,\wedge_1 E \qquad p_1 \to (p_2 \to p_3)}{p_2 \to p_3}\,\to E}{p_3}\,\to E}{(p_1 \wedge p_2) \to p_3}\,\to I^{(1)}$$

é uma derivação cuja conclusão é $(p_1 \wedge p_2) \to p_3$ e em que todas as hipóteses são canceladas, excepto $p_1 \to (p_2 \to p_3)$.

Logo,
$$p_1 \to (p_2 \to p_3) \vdash (p_1 \wedge p_2) \to p_3$$

5.

a)
$$h : \mathcal{T}_L \to \mathcal{T}_L$$
$$h(t) = t\,[2 \times x_1 / x_0], \quad \text{para todo } t \in \mathcal{T}_L$$

i)
$$h(t) = (2 \times x_0)[2 \times x_1 / x_0] \times (2 \times x_1)[2 \times x_1 / x_0]$$
$$= (2 \times (2 \times x_1)) \times (2 \times x_1)$$

$$VAR(h(t)) = VAR(2 \times (2 \times x_1)) \cup VAR(2 \times x_1)$$
$$= VAR(2) \cup VAR(2 \times x_1) \cup VAR(2) \cup VAR(x_1)$$
$$= \emptyset \cup \{x_1\} \cup \emptyset \cup \{x_1\} = \{x_1\}.$$

ii) $h : \mathcal{T}_L \to \mathcal{T}_L$ é definida por recursão estrutural por:

1) $h(2) = 2$
2) $h(t_1 \times t_2) = h(t_1) \times h(t_2)$, para quaisquer $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$.

iii) $\varphi = \forall x_0 \, (x_0 < x_1 \to \neg (x_0 = x_1))$

Seja $t \in \mathcal{T}_L$.
As duas ocorrências de x_1 em φ estão no alcance do quantificador $\forall x_0$. Como $x_0 \notin VAR(h(t))$, x_1 é substituível por $h(t)$ em φ.

<u>OBS</u>: mostremos que $x_0 \notin VAR(h(t))$ para todo $t \in \mathcal{T}_L$, por indução estrutural para $\mathcal{T}_L$.

(1) <u>$t = 2$</u> $\quad h(t) = 2$ e $VAR(h(t)) = \emptyset$
Logo, $x_0 \notin VAR(h(t))$.

(2) <u>$t = t_1 \times t_2$</u> para alguns $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$.
Admitamos que $x_0 \notin VAR(h(t_1))$ e $x_0 \notin VAR(h(t_2))$.
Temos que $h(t) = h(t_1) \times h(t_2)$. Logo, $VAR(h(t)) =$

$= VAR(h(t_1)) \cup VAR(h(t_2))$.

Assim, é imediato que $x_0 \notin VAR(h(t))$.

Por (1) e (2), pelo Princípio de Indução Estrutural para T_L, $x_0 \notin VAR(h(t))$, para todo $t \in T_L$.

b)

(i) $E \models \varphi$

Seja a uma atribuição em E.

Temos que

$$
\begin{aligned}
E \models \varphi[a] &\text{ sse } \varphi[a] = 1 \\
&\text{ sse } \exists x_0 \, (x_0 \times x_0 = 2)\,[a] = 0 \\
&\text{ sse para todo } d \in \mathbb{Q}, \; (x_0 \times x_0 = 2)\left[a\binom{x_0}{d}\right] = 0 \\
&\text{ sse para todo } d \in \mathbb{Q}, \; d \tilde{\times} d \neq \tilde{2} \\
&\text{ sse para todo } d \in \mathbb{Q}, \quad d \times d \neq 2 \\
&\text{ sse para todo } d \in \mathbb{Q}, \quad d^2 \neq 2
\end{aligned}
$$

Ora, $d^2 = 2 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{2}$. Como $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, é verdade, então, que para todo $d \in \mathbb{Q}$, $d^2 \neq 2$.

Logo, $E \models \varphi[a]$.

Assim, $E \models \varphi$ é uma afirmação verdadeira.

(ii) Consideremos a estrutura $E' = (\mathbb{Q}, \sim)$ onde $\sim$ coincide com $\tilde{}$ exceto na interpretação da constante 2, sendo $\tilde{2} = 0$. Dada uma atribuição a em E',

$$
\begin{aligned}
E' \models \varphi[a] &\text{ sse para todo } d \in \mathbb{Q} \; (x_0 \times x_0 = 2)\left[a\binom{x_0}{d}\right] = 0 \\
&\text{ sse para todo } d \in \mathbb{Q}, \; d \tilde{\times} d \neq \tilde{2} \\
&\text{ sse para todo } d \in \mathbb{Q}, \; d \times d \neq 0 \\
&\text{ sse para todo } d \in \mathbb{Q}, \; d^2 \neq 0
\end{aligned}
$$

Como $0^2 = 0$ e $0 \in \mathbb{Q}$, a afirmação "para todo $d \in \mathbb{Q}$, $d^2 \neq 0$" é falsa. Logo, $E' \not\models \varphi[a]$.

Logo, E' é uma estrutura onde φ não é válida.

Portanto, φ não é universalmente válida, donde $\not\models \varphi$ é uma afirmação verdadeira.

(c) $\forall x_0 \left((x_0 \times x_0 < 2) \vee (x_0 \times x_0 = 2) \right)$.

6. Sejam E uma estrutura e a uma atribuição em E tais que (E,a) realiza $\Gamma = \{ \forall x\, \varphi, \ \forall x (\varphi \to \psi) \}$. Vejamos se $E \models \forall x\, \psi [a]$

Então,

$$E \models \forall x\, \varphi\, [a] \text{ sse } \underbrace{\text{para todo } d \in \text{dom } E, \ \varphi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1}_{\circledast}.$$

e

$$E \models \forall x\, (\varphi \to \psi)\, [a] \text{ sse para todo } d \in \text{dom } E, \ (\varphi \to \psi)\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$$

Ora,

$$(\varphi \to \psi)\left[a\binom{x}{d}\right] = 1 \text{ se e só se } \varphi\left[a\binom{x}{d}\right] = 0 \text{ ou } \psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1.$$

Assim,

$$\text{para todo } d \in \text{dom } E, \ \left(\varphi\left[a\binom{x}{d}\right] = 0 \text{ ou } \psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1 \right)$$

Logo, por $\circledast$,

$$\text{para todo } d \in \text{dom } E, \ \psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1,$$

ou seja,

$$E \models \forall x\, \psi\, [a].$$