Universidade do Minho		12 de Julho de 2011
	Exame de	
	Lógica EI	
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. Considere o conjunto G, de fórmulas do Cálculo Proposicional, definido indutivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{p_n \in G}\ n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad\qquad \frac{\varphi \in G}{(\neg\varphi \to p_0) \in G}\ r_1 \qquad\qquad \frac{\varphi \in G \quad \psi \in G}{(\varphi \vee \psi) \in G}\ r_2$$

   (a) Construa a árvore de formação da fórmula $\sigma = (\neg((\neg p_1 \to p_0) \vee p_0) \to p_0)$ de G.

   (b) Defina, por recursão estrutural em G, a função $f : G \to \mathbb{N}_0$ que a cada $\varphi \in G$ faz corresponder o número de ocorrências de variáveis proposicionais em φ.

   (c) Sendo σ a fórmula da alínea (a), calcule $f(\sigma)$ usando a definição recursiva de f da alínea (b).

   (d) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para G.

   (e) Prove, por indução estrutural em G, que $f(\varphi) \neq 0$ para toda a fórmula $\varphi \in G$.

2. Apresente uma forma normal conjuntiva e uma forma normal disjuntiva logicamente equivalentes à fórmula do Cálculo Proposicional $\neg(p_1 \to p_0) \vee (p_0 \wedge p_1)$.

3. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) Para quaisquer $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \models \psi \to \theta$ e θ é uma contradição, então $\{\varphi, \psi\}$ é inconsistente.

   (b) Para quaisquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, se $\Gamma \models \varphi$ e Γ é consistente, então φ é uma tautologia.

   (c) Para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \leftrightarrow \psi \not\vdash \varphi \vee \psi$.

4. Construa uma derivação em DNP mostrando que $(p_1 \to p_2) \to \neg p_1 \vdash \neg(p_1 \wedge p_2)$.

5. Seja L o tipo de linguagem $(\{f, +\}, \{P, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(P) = 1$ e $\mathcal{N}(+) = \mathcal{N}(<) = 2$. Seja ainda $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

$$\begin{array}{ll} \overline{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{f}(n) = -n & \qquad \overline{P} = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\} \\ \overline{+} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{+}(n,m) = n + m & \qquad \overline{<} = \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : n < m\} \end{array}$$

   (a) Das seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_L$, apresente árvores de formação das que pertencem a $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$, e indique (sem justificar) quais as que não pertencem a nenhum desses conjuntos.
   (i) $f(f(f(x_1 + x_2)))$ (ii) $f(f(f(x_1 + x_2))) < x_1 + (x_1 + x_1)$ (iii) $\forall_{x_2} f(x_2)$

   (b) Considere a L-fórmula $\sigma = \exists_{x_2}(x_0 < f(x_2)) \vee \forall_{x_1}(x_1 < x_0 + x_2)$. Calcule LIV($\sigma$) e indique L-termos t e t' tais que x_0 seja substituível por t mas não seja substituível por t' em σ.

   (c) Indique, sem justificar, uma L-fórmula que represente a afirmação "O simétrico da soma de quaisquer dois números inteiros positivos não é positivo".

   (d) Diga (justificando) se cada uma das seguintes L-fórmulas é válida em E e se é universalmente válida.
   (i) $\exists_{x_0}(f(f(x_0)) < x_0)$ (ii) $\forall_{x_0}(P(x_0) \to (x_0 < x_0 + x_0))$

   (e) Seja Γ o conjunto constituído pelas duas fórmulas da alínea (d). Indique (justificando) se $\Gamma \models \exists_{x_0}(f(f(x_0)) < x_0 + x_0)$.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.
	1,25+1,5+1+1+1,5	1,5	1,5+1,5+1,5	1,5	1,25+1+1+2+1