Universidade do Minho	Exame de **Lógica EI**	13 de Julho de 2010
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas (se nada for dito em contrário).*

1. Considere o conjunto T, de fórmulas do Cálculo Proposicional, definido indutivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{(\bot \to p_n) \in T}\ n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \frac{\varphi \in T}{(\varphi \vee \bot) \in T}\ r_1 \qquad \frac{\varphi \in T \quad \psi \in T}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in T}\ r_2$$

   (a) Indique uma sequência de formação de $\sigma = ((\bot \to p_0) \vee \bot) \leftrightarrow (\bot \to p_1)$.

   (b) Defina, por recursão estrutural em T, a função $f : T \to \mathbb{N}_0$ que a cada φ faz corresponder o número de ocorrências de conectivos lógicos em φ.

   (c) Calcule $f(\sigma)$, onde f é a função da alínea (b) e σ a fórmula da alínea (a).

   (d) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para T.

   (e) Prove, por indução estrutural em T, que todos os elementos de T são tautologias.

2. Apresente uma forma normal conjuntiva e uma forma normal disjuntiva logicamente equivalentes à fórmula do Cálculo Proposicional $(\neg p_0 \vee p_1) \to p_1$.

3. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, relativas a uma fórmula arbitrária $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

   (a) Se $\{\varphi\}$ é consistente, então $\neg\varphi$ é uma contradição.

   (b) Se $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ é consistente e $\Gamma \models \varphi$, então φ não é uma contradição.

4. Considere as seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

$$\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to p_3, \qquad \psi = p_1 \vee p_3.$$

   (a) Construa uma derivação em DNP mostrando que $\psi \vdash \varphi$.

   (b) Mostre que $\nvdash \varphi$.

5. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, m, +\}, \{P, \leq\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(m) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(P) = 1$ e $\mathcal{N}(\leq) = 2$.
   Seja ainda $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que $\overline{0}$ é o número *zero*, $\overline{m}$ é a função $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que a cada número n faz corresponder o seu módulo $|n|$, $\overline{+}$ é a operação de *adição* em $\mathbb{Z}$, $\overline{P} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ (ou seja, $\overline{P}$ é o predicado "é par"), e $\overline{\leq}$ é a relação "menor ou igual" em $\mathbb{Z}$.

   (a) Das seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_L$, apresente árvores de formação das que pertencem a $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$, e indique (sem justificar) quais as que não pertencem a nenhum desses conjuntos.
   (i) $(0 + x_1) + (m(x_3))$ (ii) $\exists_{x_1}((x_1 \leq 0) \wedge P(x_1))$ (iii) $\forall x_2(m(x_2) \vee P(x_2))$

   (b) Considere a L-fórmula $\sigma = \forall_{x_2}(x_1 \leq m(x_2)) \to \exists_{x_0}(x_1 \leq x_0)$. Calcule LIV$(\sigma)$ e indique um L-termo t tal que x_1 não seja substituível por t em σ.

   (c) Indique, sem justificar, uma L-fórmula que represente, na estrutura E, a afirmação "quaisquer que sejam dois números, se o módulo da soma desses números é menor ou igual a zero, então ambos os números são menores ou iguais a zero".

   (d) Diga se cada uma das seguintes L-fórmulas é válida em E e se é universalmente válida.
   (i) $\varphi = \exists_{x_0}(x_0 \leq x_1)$ (ii) $\psi = \forall_{x_0}(x_0 \leq x_0) \to \forall_{x_0}\exists_{x_1}(x_0 \leq x_1)$

   (e) Indique uma L-fórmula que seja consequência semântica da fórmula φ da alínea anterior (e que não seja a própria fórmula φ).

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.
	1,25+1,5+1+1+1,5	1,5	1,5+1,5	1,5+1,5	1,25+1+1+2+1