Dep. Matem., Univ. Minho	Exame de **Lógica EI**	6 de Julho de 2009
Lic. Eng. Informática		Duração: 2 horas

Este exame é constituído por 6 questões. ***Justifique*** *adequadamente* **todas** *as suas respostas.*

1. Considere o conjunto T, de fórmulas do Cálculo Proposicional, definido indutivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{\neg p_i \in T}\ i \quad (i \in \mathbb{N}_0) \qquad \frac{\varphi \in T}{(\varphi \to \bot) \in T}\ r_1 \qquad \frac{\varphi \in T \quad \psi \in T}{(\neg\varphi \vee \psi) \in T}\ r_2$$

   (a) Construa a árvore de formação da fórmula $\sigma = ((\neg(\neg p_2 \to \bot) \vee \neg p_0) \to \bot)$ de T.

   (b) Dê exemplo de um elemento de T que seja uma tautologia.

   (c) Defina, por recursão estrutural, uma função $g : T \to \mathbb{N}_0$ tal que, para cada $\varphi \in T$, $g(\varphi)$ seja o número de ocorrências do conectivo $\neg$ na fórmula φ.

   (d) Calcule $g(\sigma)$ usando a definição recursiva de g da alínea anterior.

   (e) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para T.

   (f) Mostre que, para todo o $\varphi \in T$, $g(\varphi)$ é ímpar.

2. Determine uma forma normal conjuntiva (FNC) e uma forma normal disjuntiva (FND) logicamente equivalentes à fórmula $\varphi = p_0 \wedge \neg(\neg p_0 \to p_2)$.

3. Sejam φ e ψ fórmulas do Cálculo Proposicional e seja Γ um conjunto de fórmulas do Cálculo Proposicional. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

   (a) Se $\vdash \varphi \to \psi$, então $\models (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi$.

   (b) Se Γ é consistente e $\varphi \in \Gamma$, então $\neg\varphi \notin \Gamma$.

4. Seja φ uma fórmula do Cálculo Proposicional. Construa uma derivação da fórmula

$$\varphi \leftrightarrow (\neg\varphi \to \bot).$$

(v.s.f.f.)

5. Seja $L = (\{0, s, +\}, \{\leq\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$ e $\mathcal{N}(\leq) = 2$.

   (a) Das seguintes palavras de $\mathcal{A}_L^+$ verifique se algumas são L-termos ou L-fórmulas e, nesses casos, construa as respectivas árvores de formação.

      (i) $((s(x_1) + x_2) \leq 0) + (x_3 \leq s(0))$;

      (ii) $s(x_1 + (0 + s(x_3)))$;

      (iii) $\forall_{x_1}(s(x_1) \leq x_3 + 0)$.

   (b) Seja $E = (\mathbb{N}_0, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

   - $\overline{0}$ é o número inteiro *zero*;
   - $\overline{s}$ é a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$;
   - $\overline{+}$ é a função de *adição* em $\mathbb{N}_0$;
   - $\overline{\leq}$ é a relação *menor ou igual* em $\mathbb{N}_0$.

   Seja a a atribuição em E tal que $a(x_i) = i$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$. Calcule:

      (i) $(x_2 + s(x_3 + 0))[a]$;

      (ii) $\exists_{x_7}(s(x_3) + x_7 \leq x_5)[a]$.

   (c) Sejam E a L-estrutura e a a atribuição da alínea (b), e considere o seguinte conjunto de L-fórmulas

   $$\Gamma = \{\neg(s(x_5) + x_1 \leq x_7),\ \forall_{x_2}(x_2 \leq s(x_2))\}.$$

   Verifique se (E, a) é uma realização de Γ.

6. Considere o tipo de linguagem de Cálculo de Predicados $L = \{\{0, m, s\}, \{<, =\}, \mathcal{N}\}$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(m) = \mathcal{N}(s) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = \mathcal{N}(=) = 2$. Considere ainda o L-termo

   $$t = m(x_1, x_2)$$

   e a L-fórmula

   $$\varphi = \forall_{x_2}(s(x_2, x_1) = x_2).$$

   (a) Calcule $\varphi\,[t/x_1]$.

   (b) Diga se x_1 é substituível por t em φ.

   (c) Considere a L-estrutura $(\mathbb{Z}, \overline{})$ em que $\overline{0} = 0$, $\overline{m}$ e $\overline{s}$ são as operações de mínimo e supremo entre dois inteiros, $\overline{<}$ e $\overline{=}$ são as relações de menor usual e de igualdade entre inteiros. Seja $a : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}$ a atribuição tal que

   $$a(x_i) = \begin{cases} i & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ -i & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

   Calcule $\varphi\,[t/x_1]\,[a]$ e $\varphi\left[a\binom{x_1}{t[a]}\right]$, e comente os resultados obtidos.

(Fim)

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.
	1+1+1+1+1+1.5	1.5	1.5+1	1.5	1.5+1.5+1.5	1+1+1.5