~~Enunciar - Para cada $\varphi \in F^{CP}$, seja $P(\varphi)$ a afirmação"~~

Enunciar - Princípio de Indução Estrutural para E: Seja $P(s)$ uma propriedade relativa aos elementos s de E. Se: i) $\overline{c \in E}^{c}$, $P(c)$ é verdadeira; ii) $\overline{\sigma m \in E}^{\sigma m}$, $P(\sigma m)$ é verdadeira; iii) $\dfrac{}{f(t) \in E}^{f}$, se $P(t)$ é verdadeira, então $P(f(t))$ é verdadeira. Então, pelo Princípio de Indução Estrutural para E, $P(s)$ é verdadeira, para todo o $s \in E$.

Prova - Para cada $\varphi \in F^{CP}$, seja $P(\varphi)$ a afirmação "$c(\varphi) \neq \emptyset \Rightarrow p(\varphi) > 0$". i) Como $c(p_i) = \emptyset$, $P(p_i)$ é verdadeira, $\forall p_i \in V^{CP}$; ii) Como $c(\bot) \neq \emptyset$, $P(\bot)$ é verdadeira;
iii) Seja $\varphi \in F^{CP}$. Suponhamos que $P(\varphi)$ é verdadeira, ou seja, $c(\varphi) \neq \emptyset \Rightarrow p(\varphi) > 0$. Queremos mostrar que $P(\neg\varphi)$ é verdadeira, ou seja, $c(\neg\varphi) \neq \emptyset \Rightarrow p(\neg\varphi) > 0$. Suponhamos que $c(\neg\varphi) \neq \emptyset$, então, temos que: $p(\neg\varphi) = 2 + p(\varphi)$. Como por hip. ind., $p(\varphi) > 0$, então $2 + p(\varphi) > 0$. Logo $p(\neg\varphi)$ é verdadeira, para todo o $\varphi \in F^{CP}$.
iv) Seja $\square = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in F^{CP}$. Suponhamos que, $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras, ou seja, $c(\varphi_1) \neq \emptyset \Rightarrow p(\varphi_1) > 0$ e $c(\varphi_2) \neq \emptyset \Rightarrow p(\varphi_2) > 0$. Queremos mostrar que $c(\varphi_1 \square \varphi_2) \neq \emptyset \Rightarrow p(\varphi_1 \square \varphi_2) > 0$. Suponhamos que $c(\varphi_1 \square \varphi_2) \neq \emptyset$. Então: $p(\varphi_1 \square \varphi_2) = 2 + p(\varphi_1) + p(\varphi_2)$. Como, por hip. ind., $p(\varphi_1) > 0$ e $p(\varphi_2) > 0$, temos que $2 + p(\varphi_1) + p(\varphi_2) > 0$. Logo $p(\varphi_1 \square \varphi_2)$ é verdadeira.

Recursão - $subf: F^{CP} \rightarrow P(F^{CP})$ é a função tal que: i) para cada $p_i \in V^{CP}$, $subf(p_i) = \{p_i\}$; ii) $subf(\bot) = \{\bot\}$; iii) $\forall \varphi \in F^{CP}$, $subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup subf(\varphi)$; iv) $\forall \varphi, \psi \in F^{CP}$ e $\forall \square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $subf(\varphi \square \psi) = \{\varphi \square \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi$

3.2-a) Queremos definir uma valoração v tal que $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = 1$. Basta tomar $v(p_1) = v(p_3) = 0$.

Cond. nec. - $v((p_3 \rightarrow p_2) \rightarrow p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$ é condição necessária para $v(p_3) = 0$; $(v(p_3) = 0) \Rightarrow (v((p_3 \rightarrow p_2) \rightarrow p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0)$

Cond. suf. - Uma condição suficiente para $v(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) = 0$ é $v(p_1) = 1$ e $v(p_3) = 0$. ; $(v(p_1) = 1$ e $v(p_3) = 0) \Rightarrow (v(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) = 0)$

3.5 - $(\models \varphi \vee \psi) \Rightarrow (\models \varphi \vee \models \psi)$. Suponhamos que $\models \varphi \vee \psi$. Então, $v(\varphi \vee \psi) = 1$, para toda a valoração v sse $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$, para toda a valoração v sse $\models \varphi$ ou $\models \psi$. Verdadeira.

FNC e FND - $(p_1 \rightarrow \bot) \Leftrightarrow (p_1 \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0)) \Leftrightarrow (\neg p_1 \vee (p_0 \wedge \neg p_0))$ - FND $\Leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_0) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_0)$ - FNC

3.16 $\{p_0 \vee \neg p_1, p_1, p_0 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)\}$. Seja v a valoração tal que $v(p_1) = 1 = v(p_0) = v(p_2)$. Então, $v \models \Gamma$, logo Γ é consistente.

3.5 a) $(\models \varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\models \varphi$ e $\models \psi)$; $\models \varphi \wedge \psi$ só se $v(\varphi \wedge \psi) = 1$, para toda a valoração v sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$ para toda a valoração v sse $\models \varphi$ e $\models \psi$, logo, verdadeiro.

c) $(\models \varphi$ ou $\models \psi) \Rightarrow (\models \varphi \vee \psi)$. Suponhamos que $\models \varphi$ ou $\models \psi$. Então, $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$, para toda a valoração v sse $v(\varphi \vee \psi) = 1$, para toda a valoração v sse $\models (\varphi \vee \psi)$. Logo, verdadeiro.

d) $(\models \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\not\models \psi) \Rightarrow \not\models \varphi$. Suponhamos que $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\not\models \psi$. Então $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$, para toda a valoração v sse $v(\varphi) = v(\psi)$, para toda a valoração v. $(\not\models \psi)$, então $v(\psi) = 1$ ou $v(\psi) = 0$.
Como $\not\models \varphi$ só se $v(\psi) = 1$ ou $v(\varphi) = 0$, podemos ter $v(\varphi) \neq v(\psi)$. Logo, falso.

3.10 - $\{\wedge, \vee\}$ não é completo pois, por exemplo, $\bot \in F^{CP}$ e $\nexists \psi \in F^{CP}$: $\bot \Leftrightarrow \psi$ e todos os conectivos de ψ pertencem a $\{\wedge, \vee\}$.
$\{\wedge, \vee, \neg\}$. Seja $f: F^{CP} \rightarrow F^{CP}$ a única função tal que: i) $\forall p_j \in V^{CP}$, $f(p_j) = p_j$; ii) $f(\bot) = p_0 \wedge \neg p_0$; iii) $\forall \varphi, \psi \in F^{CP}$: a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$; b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$; c) $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \wedge f(\psi)$;
d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$; e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = (\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \wedge (\neg f(\psi) \vee f(\varphi))$. Ora, como $\forall \varphi$, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e como todos os conectivos pertencem a $\{\wedge, \vee, \neg\}$, temos que $\{\wedge, \vee, \neg\}$ é completo

DNP -

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi \vee \psi)^{(1)} \quad \dfrac{\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\neg E}{\bot}(1) \quad \psi^{(2)}}{\dfrac{\psi}{\psi \vee \varphi}\vee_1 I^{(2)}}\vee E \qquad \dfrac{(\psi \vee \varphi)^{(1)} \quad \dfrac{\dfrac{\psi \quad \neg\psi}{\bot}\neg E}{\bot}(1) \quad \varphi^{(3)}}{\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee_1 I^{(3)}}\vee_2 E}{(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)}\leftrightarrow I^{(1)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi^{(2)} \quad \dfrac{((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))^{(1)}}{(\varphi \rightarrow \psi)}\wedge_1 E}{\psi}\rightarrow E \qquad \dfrac{\psi^{(2)} \quad \dfrac{((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))^{(1)}}{(\psi \rightarrow \varphi)}\wedge_2 E}{\varphi}\rightarrow E}{\psi \leftrightarrow \varphi}\leftrightarrow I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi^{(3)} \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)^{(1)}}{\psi}\leftrightarrow_2 E}{\varphi \rightarrow \psi}\rightarrow I^{(3)} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi^{(4)} \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)^{(1)}}{\varphi}\leftrightarrow_1 E}{\psi \rightarrow \varphi}\rightarrow I^{(4)}}{(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)}\wedge I}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))}\leftrightarrow I^{(1)}$$

4.5 a) $\Rightarrow$ Suponhamos que $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Então existe uma derivação D de $\neg\varphi$ a partir de Γ. Logo $\dfrac{\varphi \quad \overset{D}{\neg\varphi}}{\bot}\neg E$ é uma derivação de $\bot$ a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Portanto, $\Gamma, \varphi \vdash \bot$;
$\Leftarrow$ Suponhamos que $\Gamma, \varphi \vdash \bot$, logo existe uma derivação D de $\bot$ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, $\dfrac{\overset{\cancel{\varphi}^{(1)}}{D}}{\neg\varphi}\neg I^{(1)}$ é uma derivação de $\neg\varphi$ a partir de $\Gamma (\Gamma \cup \{\varphi\} \setminus \{\varphi\})$. Portanto, $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Indução L-termos - Princípio de Indução Estrutural para L: Seja $P(s)$ uma propriedade relativa aos elementos $s \in L$. Se: i) $\overline{x_i \in T_L}^{x_i}$, $\forall x_i \in V$, $P(x_i)$ é verdadeira; ii) $\dfrac{t \in T_L}{f(t) \in T_L}f$, para cada $t \in T_L$, se $P(t)$ é válida, $P(f(t))$ é válida;
iii) $\overline{0 \in T_L}^{0}$, $P(0)$ é válida; iv) $\dfrac{t_1 \in T_L \quad t_2 \in T_L}{g(t_1, t_2) \in T_L}g$, para cada $t_1, t_2 \in T_L$, se $P(t_1)$ e $P(t_2)$ são válidas, então $P(g(t_1, t_2))$ é válida. Então, pelo Princ. Ind. Estrutural para L, $P(s)$ é verdadeira, $\forall s \in T_L$.

Recursão L-termos - $SUBT(t)$ é a função tal que: i) $\forall x_i \in V$, $SUBT(x_i) = \{x_i\}$; ii) $\forall c \in C$, $SUBT(c) = \{c\}$; iii) para cada símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$, $SUBT(f(t)) = \{f(t)\} \cup SUBT(t)$

VAR - $VAR(g(x_1, f(x_0))) = VAR(x_1) \cup VAR(f(x_0)) = \{x_1\} \cup VAR(x_0) = \{x_1\} \cup \{x_0\} = \{x_0, x_1\}$

Substituição - $g(x_1, f(x_1))[g(x_0, 0)/x_1] = g(x_1[g(x_0, 0)/x_1], f(x_1)[g(x_0, 0)/x_1]) = g(g(x_0, 0), f(x_1[g(x_0, 0)/x_1])) = g(g(x_0, 0), f(g(x_0, 0))$

LIV/LIG - $LIV(\forall x_0 (x_0 < x_1) \vee \exists x_1 (x_1 < x_0)) = \{x_0, x_1\}$; $LIG(\forall x_0 (x_0 < x_1) \vee \exists x_1 (x_1 < x_0)) = \{x_0, x_1\}$

Estrutura - Seja $E = (D, \bar{\ })$, onde $\bar{f}_1 = d_1$, $\bar{f}_2 = d_1$; $\begin{array}{l} f_3: D \rightarrow D \\ x \mapsto x \end{array}$; $\begin{array}{l} f_4: D^2 \rightarrow D \\ (x, y) \mapsto x \end{array}$; $\bar{R}_1 = \{d_2\} \subseteq D^1$; $\bar{R}_2 = \{(d_1, d_1), (d_2, d_1)\} \subseteq D^2$. Então E é uma L-estrutura de domínio D.

Atribuição - LArit-termo - $(x_2 \times (0 + s(x_3)))[a^{ind}] = x_2[a^{ind}] \,\bar{\times}\, (0 + s(x_3))[a^{ind}]) = a^{ind}(x_2) \,\bar{\times}\, (0[a^{ind}] \,\bar{+}\, s(x_3)[a^{ind}]) = 2 \,\bar{\times}\, (\bar{0} \,\bar{+}\, \bar{s}(x_3[a^{ind}])) = 2 \,\bar{\times}\, (\bar{0} \,\bar{+}\, \bar{s}(3+1)) = 8 \in \mathbb{N}_0$

LArit-fórmula - a^{ind}; $\varphi[a] = 1$ sse $\forall m_1 \in \mathbb{N}_0 ((x_1 = x_0) \vee \exists x_2 (x_1 = s(x_2)))[a\binom{x_1}{m_1}] = 1)$ sse $\forall m_1 \in \mathbb{N}_0 ((x_1 = x_0)[a\binom{x_1}{m_1}] = 1$ ou $(\exists x_2 (x_1 = s(x_2)))[a\binom{x_1}{m_1}] = 1)$ sse
sse $\forall m_1 \in \mathbb{N}_0 (x_1[a\binom{x_1}{m_1}] \,\bar{=}\, x_0[a\binom{x_1}{m_1}]$ ou $\exists m_2 \in \mathbb{N}_0 (x_1 = s(x_2))[a\binom{x_1}{m_1}\binom{x_2}{m_2}] = 1)$ sse $\forall m_1 \in \mathbb{N}_0 (m_1 \,\bar{=}\, \bar{0}$ ou $\exists m_2 \in \mathbb{N}_0 (x_1[a\binom{x_1}{m_1}\binom{x_2}{m_2}] \,\bar{=}\, s(x_2)[a\binom{x_1}{m_1}\binom{x_2}{m_2}]))$ sse
sse $\forall m_1 \in \mathbb{N}_0 (m_1 \,\bar{=}\, \bar{0}$ ou $\exists m_2 \in \mathbb{N}_0 (m_1 \,\bar{=}\, \bar{s}(x_2[a\binom{x_1}{m_1}\binom{x_2}{m_2}])))$ sse $\forall m_1 \in \mathbb{N}_0 (m_1 \,\bar{=}\, \bar{0}$ ou $\exists m_2 \in \mathbb{N}_0 (m_1 \equiv m_2 + 1)$. Dado que esta última afirmação é verdadeira, ~~logo~~ deduzimos que $\varphi[a] = 1$.

Satisfação - ~~A LArit-fórmula~~ A LArit-estrutura EArit satisfaz a LArit-fórmula $\varphi = \forall x_1 (x_1 = x_0 \vee \exists x_2 (x_1 = s(x_2)))$, para a atribuição a^{ind}. De facto, $\varphi[a^{ind}]_{EArit} = 1$, logo $EArit \models \varphi[a^{ind}]$.

Instância - Consideremos a fórmula $\varphi = (p_1 \rightarrow p_3) \leftrightarrow (\neg p_3 \rightarrow \neg p_1)$ do Calc. Prop. A seguinte LArit-fórmula é uma instância de φ.
$(\forall x_1 (s(x_1) = x_1 + 0) \rightarrow (x_1 = x_2)) \leftrightarrow (\neg (x_1 = x_2) \rightarrow \neg \forall x_1 (s(x_1) = x_1 + 0))$. De facto, $\psi = \varphi[(\forall x_1 (s(x_1) = x_1 + 0))/p_1, (x_1 = x_2)/p_3]$
- A fórmula $\varphi = (p_1 \rightarrow p_3) \leftrightarrow (\neg p_3 \rightarrow \neg p_1)$ é uma tautologia do Calc. Prop. Logo, a LArit-fórmula ψ, é válida, pois é uma instância de φ.

Realização - O par $(EArit, a^{ind})$ é uma realização do conjunto $\{\forall x_0 (s(x_0) = x_0 + s(0)), \forall x_0 \exists x_1 (x_0 < x_1)\}$ de LArit-fórmulas, mas não é uma realização do conjunto $\{\forall x_0 (s(x_0) = x_0 + s(0)), \exists x_1 \forall x_0 (x_0 < x_1)\}$ de LArit-fórmulas.

Consistência $\{\forall x_0 (s(x_1) = x_0 + s(0)), \forall x_0 \exists x_1 (x_0 < x_1)\}$ é semanticamente consistente; $\{\forall x_0\, \neg (s(x_0) = x_0), s(0) = 0\}$ de LArit-fórmulas é semanticamente inconsistente.

Consequência A LArit-fórmula $0 < s(0)$ é consequência semântica do conjunto de LArit-fórmulas $\Gamma = \{\forall x_1 (x_1 < s(x_1))\}$. De facto, se (E, a) é uma realização de Γ, em $E = (D, \bar{\ })$, então $\forall m_1 \in D\ (m_1, \bar{s}(m_1)) \in \bar{<}$, donde, em particular, $(\bar{0} < \bar{s}(0)) \in \bar{<}$ e, assim, $\Gamma \models (0 < s(0))[a]$