Lógica CC
Licenciatura em Ciências da Computação

Luís Pinto

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

$1^{\underline{o}}$. semestre, 2020/2021

2.2 Semântica do Cálculo Proposicional

Definição 40:

Os *valores lógicos* do CP são o *verdadeiro* e o *falso*.

Estes valores serão denotados por 1 e 0, respetivamente.

Definição 41: Uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0,1\}$ é uma *valoração* quando satisfaz as seguintes condições:

a) $v(\perp) = 0$,

b) $v(\neg\varphi) = f_{\neg}(v(\varphi))$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

c) $v(\varphi\square\psi) = f_{\square}(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

onde $f_{\neg}, f_{\wedge}, f_{\vee}, f_{\rightarrow}, f_{\leftrightarrow}$ são as *funções boleanas* determinadas pelas *tabelas de verdade* dos respetivos conetivos; concretamente:

Definição 41 (cont.):

$$\begin{array}{rccc} f_{\neg}: & \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & 0 & \mapsto & 1 \\ & 1 & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_{\wedge}: & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \\ & (0,1) & \mapsto & 0 \\ & (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}$$

Definição 41 (cont.):

$$\begin{array}{rcccl} f_{\vee} : & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 1 \\ & (0,1) & \mapsto & 1 \\ & (0,0) & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} f_{\rightarrow} : & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \\ & (0,1) & \mapsto & 1 \\ & (0,0) & \mapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} f_{\leftrightarrow} : & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \\ & (0,1) & \mapsto & 0 \\ & (0,0) & \mapsto & 1 \end{array}$$

Proposição 42: Seja v uma valoração e sejam φ, ψ fórmulas do CP. Então,

a) $v(\neg\varphi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$;
$v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;

b) $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$;
$v(\varphi \wedge \psi) = \mathit{mínimo}(v(\varphi), v(\psi))$;

c) $v(\varphi \vee \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$;
$v(\varphi \vee \psi) = \mathit{máximo}(v(\varphi), v(\psi))$;

d) $v(\varphi \to \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 1$;

e) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$.

Dem.: Exercício. $\square$

Proposição 43: Seja $f : \mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ uma função. Então, existe uma e uma só valoração v t.q. $v(p) = f(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.

Dem.: Consequência imediata do Princípio de recursão estrutural para fórmulas do CP. $\square$

Definição 44: O *valor lógico de uma fórmula* φ *para uma valoração* v é $v(\varphi)$.

Exemplo 45: Sejam v_1 a única valoração t.q. $v_1(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, e v_2 a única valoração t.q.

$$v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } \; p \in \{p_0, p_2\} \\ 0 & \text{se } \; p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_2\} \end{cases}.$$

Sejam ainda $\varphi = (p_1 \vee p_2) \to (p_1 \wedge p_2)$ e $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \to \perp)$. Então:

a) Como $v_1(p_1) = v_1(p_2) = 0$, $v_1(p_1 \vee p_2) = 0$, donde, de imediato, segue $v_1(\varphi) = 1$.
(Exercício: verifique que $v_2(\varphi) = 0$.)

b) Como $v_1(p_1) = 0$, por um lado, temos $v_1(\neg p_1) = 1$ e, por outro, temos $v_1(p_1 \to \perp) = 1$. Assim, $v_1(\psi) = 1$.
(Exercício: verifique que $v_2(\psi) = 1$; em particular, observe que v_2 e v_1 atribuem o mesmo valor lógico à única variável proposicional que ocorre em ψ.)

Proposição 46: Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula do CP. Se, para todo $p \in var(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Dem.: Por indução estrutural em fórmulas do CP.

Seja $P(\varphi)$ a condição:
para todo $p \in var(\varphi), v_1(p) = v_2(p) \Rightarrow v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

a) $P(\perp)$ é verdadeira, pois $v_1(\perp) = 0 = v_2(\perp)$, por definição de valoração.

b) Suponhamos que p' é uma variável proposicional e que, para todo $p \in var(p')$, $v_1(p) = v_2(p)$.

Assim, como $p' \in var(p')(= \{p'\})$, temos $v_1(p') = v_2(p')$.

Deste modo, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

Dem. Proposição 46 (cont.):

c) Mostremos que $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ implicam $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$.

Suponhamos que, para todo $p \in var(\varphi_1 \Box \varphi_2)$, $v_1(p) = v_2(p)$.

Então, como $var(\varphi_1 \Box \varphi_2) = var(\varphi_1) \cup var(\varphi_2)$, para $i \in \{1, 2\}$, tem-se $v_1(p) = v_2(p)$, para todo $p \in var(\varphi_i)$.

Daqui, aplicando as hipóteses de indução $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$, segue que $v_1(\varphi_1) = v_2(\varphi_1)$ e $v_1(\varphi_2) = v_2(\varphi_2)$.

Assim, $v_1(\varphi_1 \Box \varphi_2) = f_\Box(v_1(\varphi_1), v_1(\varphi_2)) = f_\Box(v_2(\varphi_1), v_2(\varphi_2)) = v_2(\varphi_1 \Box \varphi_2)$, e, portanto, $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira.

d) Exercício: demonstrar que $P(\varphi_1)$ implica $P(\neg \varphi_1)$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$. $\Box$

Definição 47:

1. Uma fórmula φ é uma *tautologia* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 1$.
2. Uma fórmula φ é uma *contradição* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 0$.

Notação 48:

A notação $\models \varphi$ significará que φ é uma tautologia.

A notação $\not\models \varphi$ significará que φ não é uma tautologia.

Exemplo 49:

1. A fórmula $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \to \perp)$ do exemplo anterior é uma tautologia.

   De facto, dada uma valoração arbitrária v, sabemos que $v(p_1) = 0$ ou $v(p_1) = 1$, e:

   (a) caso $v(p_1) = 0$, então $v(\neg p_1) = 1$ e $v(p_1 \to \perp) = 1$, donde $v(\psi) = 1$.

   (b) caso $v(p_1) = 1$, então $v(\neg p_1) = 0$ e $v(p_1 \to \perp) = 0$, donde $v(\psi) = 1$.

Exemplo 49 (cont.):

2. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \wedge \neg\varphi$ é uma contradição.

   De facto, dada uma valoração arbitrária v, sabemos que $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = 1$, e:

   (a) caso $v(\varphi) = 0$, então, de imediato, sabemos $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = 0$.

   (b) caso $v(\varphi) = 1$, então $v(\neg\varphi) = 0$, donde $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = 0$.

3. As fórmulas $p_0, \neg p_0, p_0 \vee p_1, p_0 \wedge p_1, p_0 \rightarrow p_1, p_0 \leftrightarrow p_1$ não são tautologias nem contradições. (Porquê?)

Proposição 50: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

1. φ é tautologia se e só se $\neg\varphi$ é contradição;
2. φ é contradição se e só se $\neg\varphi$ é tautologia.

Dem.: Exercício. $\square$

Observação 51:

Sabendo que φ não é uma tautologia, não podemos concluir que φ é uma contradição.

Analogamente, sabendo que φ não é uma contradição, não podemos concluir que φ é uma tautologia.

Tenha-se em atenção que existem fórmulas que não são tautologias, nem são contradições (como vimos no exemplo anterior).

Observação 52:

Pela Proposição 46, para decidir se uma fórmula φ é uma tautologia, basta calcular o valor lógico de φ para $2^{\# var(\varphi)}$ valorações (o número de atribuições, possíveis, às variáveis proposicionais de φ).

Tal pode ser descrito através de uma *tabela de verdade*, como se segue.

Observação 52 (cont.):

Introduzimos: uma coluna para cada variável proposicional de φ; uma coluna para φ; e colunas (auxiliares) para cada uma das restantes subfórmulas de φ.

Introduzimos linhas para cada uma das atribuições, possíveis, de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ (*i.e.*, sequências de 0's e 1's de comprimento igual ao número de variáveis proposicionais em φ).

Preenchemos as colunas respeitantes às variáveis proposicionais com essas atribuições.

Nas restantes posições pos_{ij} da tabela, escrevemos o valor lógico da fórmula respeitante à coluna j, para uma valoração que satisfaz as atribuições às variáveis proposicionais na linha i.

Exemplo 53: Seja φ a fórmula $(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$.

Da tabela de verdade para φ, apresentada de seguida, podemos concluir que φ é uma tautologia, uma vez que φ assume o valor lógico 1, para todas as possíveis atribuições de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ.

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \to \neg p_2$	$p_2 \to p_1$	$(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Tabela de verdade de $(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$.

Teorema 54 (Generalização): Sejam p uma variável proposicional e sejam φ e ψ fórmulas do CP.
Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ é também uma tautologia.

Dem.: Qualquer que seja a valoração v, demonstra-se, por indução estrutural na fórmula φ, que a valoração v' definida, a partir de v e de ψ, do seguinte modo

$$v'(p') = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p' = p \\ v(p') & \text{se } p' \in \mathcal{V}^{CP} - \{p\} \end{cases}$$

é tal que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$.

Portanto, se φ é uma tautologia, $v'(\varphi) = 1$ e, pela igualdade anterior, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$.

Assim, qualquer que seja a valoração v, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$, *i.e.*, $\varphi[\psi/p]$ é uma tautologia. □

Exemplo 55:

A fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia.

Logo, para qualquer fórmula ψ, a fórmula $(p_0 \vee \neg p_0)[\psi/p_0] = \psi \vee \neg\psi$ é ainda uma tautologia.

Definição 56: Uma fórmula φ diz-se *logicamente equivalente* a uma fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia, ou seja, quando para qualquer valoração v, $v(\varphi) = v(\psi)$.

Exemplo 57: Para toda a fórmula φ, $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \to \perp)$.

A demonstração deste resultado pode ser sintetizada numa *tabela de verdade*, como se segue:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \to \perp$	$\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$
1	0	0	1
0	1	1	1

Tabela de verdade de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$.

Na primeira linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 1.

Na segunda linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 0.

Proposição 58: A relação de equivalência lógica satisfaz as seguintes propriedades:

1. para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (*reflexividade*);
2. para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\psi \Leftrightarrow \varphi$ (*simetria*);
3. para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\psi \Leftrightarrow \sigma$, então $\varphi \Leftrightarrow \sigma$ (*transitividade*).

Dem.: Para mostrar 1, temos que mostar que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a fórmula $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia.

De facto, dado $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = v(\varphi)$, donde $v(\varphi \leftrightarrow \varphi) = 1$, e, consequentemente, $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia.

(Exercício: mostrar 2 e 3.) □

Corolário 59: A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}^{CP}$.

Dem.: Imediata, a partir da proposição anterior. $\square$

Proposição 60: As seguintes equivalências lógicas são válidas.

$$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \qquad (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$

(*associatividade*)

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$$

(*comutatitvidade*)

$$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$$

(*idempotência*)

$$\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \neg \perp \Leftrightarrow \varphi$$

(*elemento neutro*)

$$\varphi \vee \neg \perp \Leftrightarrow \neg \perp \qquad \varphi \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$$

(*elemento absorvente*)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \qquad \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$$

(*distributividade*)

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

(*leis de De Morgan*)

$$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$$

(*lei da dupla negação*)

$$\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

(*contrarrecíproco*)

$$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \qquad \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \psi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \perp \qquad \perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$$

(*expressão de um conetivo em termos de outros conetivos*)

Notação 61:

Uma vez que a conjunção é uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ (com $n \in \mathbb{N}$) para representar qualquer associação, através da conjunção, das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ duas a duas.

Analogamente, e uma vez que a disjunção é tambem uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ para representar qualquer associação, através da disjunção, das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ duas a duas.

Em ambos os casos, quando $n = 1$, as notações anteriores representam simplesmente a fórmula φ_1.

Teorema 62 (Substituição): Sejam $p \in \mathcal{V}^{CP}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$. Então: $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ sse para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Dem.:

i) Suponhamos que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. Então, em particular, teremos que $p[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p[\varphi_2/p]$. Logo, por definição de substituição, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.

ii) Suponhamos agora que $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$. Vamos demonstrar, por indução estrutural em fórmulas do CP, que, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\psi)$, onde $P(\psi)$ é a condição: $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Dem. Teorema 62 (cont.):

a) Por definição de substituição, $\perp[\varphi_1/p] = \perp = \perp[\varphi_2/p]$. Assim, como a relação $\Leftrightarrow$ é reflexiva, $\perp \Leftrightarrow \perp$, ou equivalentemente $\perp[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \perp[\varphi_2/p]$, e, portanto, $P(\perp)$ é verdadeira.

b) Seja $p' \in \mathcal{V}^{CP}$. Consideremos dois casos.

b.1) Caso $p' = p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = \varphi_1$ e $p'[\varphi_2/p] = \varphi_2$. Assim, como por hipótese $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, segue que $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$,

b.2) Caso $p' \neq p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = p'$ e $p'[\varphi_2/p] = p'$. Assim, tal como em a), por $\Leftrightarrow$ ser reflexiva, $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$.

Assim, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

Dem. Teorema 62 (cont.):

c) Seja ψ_1 uma fórmula e suponhamos $P(\psi_1)$ (H.I.), tendo em vista mostrar que $P(\neg\psi_1)$ é verdadeira, ou, dito por outras palavras, pretende-se mostar que $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_1)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

Seja v uma valoração. Então:

$$\begin{array}{lll} & v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p]) & \\ = & v(\neg\psi_1[\varphi_1/p]) & \text{(definição de substituição)} \\ = & f_\neg(v(\psi_1[\varphi_1/p])) & \text{(definição de valoração)} \\ = & f_\neg(v(\psi_1[\varphi_2/p])) & (*) \\ = & v(\neg\psi_1[\varphi_2/p]) & \text{(definição de valoração)} \\ = & v((\neg\psi_1)[\varphi_2/p]) & \text{(definição de substituição).} \end{array}$$

onde a igualdade assinalada com (*) é consequência da HI, pois da HI, por definição de $\Leftrightarrow$, $\psi_1[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi_1[\varphi_2/p]$ é uma tautologia, donde, em particular, $v(\psi_1[\varphi_1/p]) = v(\psi_1[\varphi_2/p])$. Assim sendo, $v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]) = 1$ e, portanto, a fórmula $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

Dem. Teorema 62 (cont.):

d) Para completar a prova, falta mostar que, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$, se $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$, então $P(\psi_1 \square \psi_2)$. (Exercício.) $\square$

Exemplo 63: Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

$$\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg\neg\varphi \vee \neg\psi \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \varphi \vee \neg\psi.$$

Justificações

(1) Lei de De Morgan.

(2) Dada uma variável proposicional $p \notin var(\psi)$ (que existe sempre, pois o número de variáveis proposicionais que ocorrem em φ é finito), pelo Teorema da Substituição, como $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] \Leftrightarrow (p \vee \psi)[\varphi/p]$ e assim, uma vez que $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] = \neg\neg\varphi \vee \psi$ e $(p \vee \psi)[\varphi/p] = \varphi \vee \psi$, segue-se que $\neg\neg\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \varphi \vee \psi$.

Donde, como $\Leftrightarrow$ é transitiva, podemos concluir a equivalência lógica entre a primeira fórmula e a última fórmula, ou seja, $\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi \vee \neg\psi$.

Definição 64:

Seja $X \subseteq \{\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ um conjunto de conetivos.

X diz-se *completo* quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e todos os conetivos de ψ estão em X.

Proposição 65: Os conjuntos de conetivos $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \bot\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são completos.

Dem.: Vamos demonstrar que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos. (A demonstração de que os outros conjuntos de conetivos mencionados são completos é deixada como exercício.)

Para tal, comecemos por definir, por recursão estrutural em fórmulas, a função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ como a única função t.q.:

a) $f(\bot) = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$;
b) $f(p) = p$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;
c) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
e) $f(\varphi \vee \psi) = \neg f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
f) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(f(\varphi) \rightarrow \neg f(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
g) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg((f(\varphi) \rightarrow f(\psi)) \rightarrow \neg(f(\psi) \rightarrow f(\varphi)))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dem. Proposição 65 (cont.):

Lema: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e os conetivos de $f(\varphi)$ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.
Dem.: Por indução estrutural em φ. Exercício.

Do lema anterior concluimos de imediato que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos, pois, para toda a fórmula φ, existe uma fórmula ψ —a fórmula $f(\varphi)$— tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e os conetivos de ψ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.

$\square$

Exemplo 66: Da demonstração da proposição anterior, podemos concluir que a fórmula

$$f((\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \perp) = \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_0)$$

é logicamente equivalente a $(\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \perp$ e os seus conetivos estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.

Definição 67: As variáveis proposicionais e as negações de variáveis proposicionais são chamadas *literais*.

Definição 68: Fórmulas do CP das formas

i) $(l_{11} \vee \ldots \vee l_{1m_1}) \wedge \ldots \wedge (l_{n1} \vee \ldots \vee l_{nm_n})$

ii) $(l_{11} \wedge \ldots \wedge l_{1m_1}) \vee \ldots \vee (l_{n1} \wedge \ldots \wedge l_{nm_n})$

em que os l_{ij} são literais e n, bem como os m_i, pertencem a $\mathbb{N}$, serão designadas por *formas normais conjuntivas* (FNC) e *formas normais disjuntivas* (FND), respetivamente.

Exemplo 69:

a) Todo o literal l é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e disjuntiva (na definição de formas normais, basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $l_{11} = l$).

b) A fórmula $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_0$ é uma FNC (faça-se $n = 3$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $l_{11} = p_1$, $l_{21} = \neg p_2$ e $l_{31} = \neg p_0$) e é também uma FND (faça-se $n = 1$, $m_1 = 3$, $l_{11} = p_1$, $l_{12} = \neg p_2$ e $l_{13} = \neg p_0$). Também a fórmula $p_1 \vee p_2$ é, em simultâneo, uma FND e uma FNC. Mais geralmente, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

c) A fórmula $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_0 \vee \neg p_1)$ é uma FNC, mas não é uma FND.

d) A fórmula $\neg(p_1 \vee p_0)$ não é nem uma FNC nem uma FND.

Proposição 70: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,
existe uma forma normal conjuntiva φ^c tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e existe uma formal normal disjuntiva φ^d tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

Dem.: Dada uma fórmula φ, uma forma normal conjuntiva e uma formal normal disjuntiva logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo, utilizando as equivalências lógicas $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1)$, $\varphi_1 \to \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\bot \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \neg\varphi_1$.
2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. $\square$

Exemplo 71: Seja $\varphi = ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0$. Então:

i)

$$\begin{array}{ll} & \varphi \\ \Leftrightarrow & ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & (\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & ((\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & (p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_0 \end{array}$$

e a última fórmula é uma FNC;

ii)

$$\begin{array}{lll} & \varphi & \\ \Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 & \text{(por } \mathbf{i)}\text{)} \\ \Leftrightarrow & (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_0) \vee (p_3 \wedge p_0), & \end{array}$$

sendo a última fórmula uma FND.

Observação 72:

Consideremos de novo a Proposição 70 e a sua demonstração.

Uma demonstração alternativa, que permite obter uma FND e uma FNC logicamente equivalentes a uma dada fórmula φ, pode ser feita com recurso à tabela de verdade de φ.

Em particular, vejamos como obter uma FND φ^d, logicamente equivalente a φ, a partir da tabela de verdade de φ.

- Se φ é uma contradição ou uma tautologia, basta tomar, respetivamente, uma FND que seja uma contradição e uma FND que seja uma tautologia; por exemplo, tome-se, respetivamente, $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$ e $\varphi^d = p_0 \vee \neg p_0$.

- Doutro modo, sem perda de generalidade, suponhamos, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis proposicionais que ocorrem em φ[1]. A tabela de verdade de φ terá 2^n linhas e pode ser representada da seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha $i \to$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

[1] Note-se que uma fórmula que não é tautologia nem é contradição terá que ter pelo menos uma variável proposicional. (Exercício)

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad \text{(para todo } j \in \{1, \ldots, n\})$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.^2$$

Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Prova-se que φ^d assim definida, de facto, é uma FND e é logicamente equivalente a φ.

[2] Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0.

Exemplo 73: Consideremos $\varphi = ((p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)) \wedge p_2$.
Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)$ de φ.
A tabela de verdade de φ é:

p_1	p_2	p_3	$\perp$	$\neg p_1$	$p_3 \to p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \perp$	ψ	φ
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1^a, a 2^a e a 6^a. Portanto, uma FND logicamente equivalente a φ é:
$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$.

Definição 74: Seja v uma valoração.

1. Dada uma fórmula do CP φ, dizemos que *v satisfaz* φ (ou que *v é modelo* de φ), e escrevemos $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$.

   Quando *v não satisfaz* φ (*i.e.*, quando $v(\varphi) = 0$), escrevemos $v \not\models \varphi$.

2. Dado um conjunto de fórmulas do CP Γ, dizemos que *v satisfaz* Γ (ou que *v é modelo de* Γ), e escrevemos $v \models \Gamma$, quando v satisfaz todas as fórmulas de Γ.

   Quando *v não satisfaz* Γ (*i.e.*, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v \not\models \varphi$ ou, equivalentemente, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$) escrevemos $v \not\models \Gamma$.

Exemplo 75: Seja v_0 a valoração que atribui o valor lógico 0 a todas as variáveis proposicionais.

1. $v_0 \models p_1 \leftrightarrow p_2$ e $v_0 \models \neg p_1 \wedge \neg p_2$;
2. $v_0 \not\models p_1 \vee p_2$ e $v_0 \not\models p_1 \leftrightarrow \neg p_2$;
3. $v_0 \models \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ (por 1);
4. $v_0 \not\models \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2^a fórmula);
5. $v_0 \not\models \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2^a fórmula).

Observação 76: Dado que no conjunto vazio não há qualquer fórmula, tem-se, trivialmente, que:

para toda a valoração v, $v \models \emptyset$.

Definição 77: Seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *consistente* ou *satisfazível* quando alguma valoração satisfaz Γ.
2. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *inconsistente* ou *insatisfazível* quando não há valorações que satisfaçam Γ.

Exemplo 78:

a) Como vimos no exemplo anterior, o conjunto de fórmulas $\Delta_1 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ é satisfeito pela valoração v_0 desse exemplo.

Portanto, Δ_1 é consistente.

b) O conjunto $\Delta_2 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$, considerado no exemplo anterior, não é satisfeito pela valoração v_0.

Mas, Δ_2 é satisfeito, por exemplo, pela valoração que atribui valor lógico 1 a qualquer variável proposicional.

Logo, Δ_2 é também consistente.

Exemplo 78 (cont.):

c) O conjunto $\Delta_3 = \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$, considerado no exemplo anterior, é inconsistente.

Dem.:

Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz Δ_3.

Então, $v(\neg p_1 \wedge \neg p_2) = 1$, e portanto $v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$, e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$.

Ora, de $v(p_2) = 0$, segue $v(\neg p_2) = 1$ e daqui e de $v(p_1) = 0$, segue $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 0$, o que contradiz $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$.

Logo, não podem existir valorações que satisfaçam Δ_3 e, assim, Δ_3 é inconsistente.

Proposição 79: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas do CP tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então:

i) se Δ é consistente, então Γ é consistente;

ii) se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Dem.: Exercício. $\square$

Definição 80: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Dizemos que φ é uma *consequência semântica* de Γ, e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a valoração v, se $v \models \Gamma$, então $v \models \varphi$.
2. Escrevemos $\Gamma \not\models \varphi$ quando φ *não é consequência semântica* de Γ, *i.e.*, quando para alguma valoração v se tem $v \models \Gamma$ e, no entanto, $v \not\models \varphi$.

Observação 81: Da definição anterior, aplicando as definições de satisfação de uma fórmula e satisfação de um conjunto de fórmulas, segue de imediato que:

1. $\Gamma \models \varphi$ se e só se para toda a valoração v, se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.
2. $\Gamma \not\models \varphi$ se e só se para alguma valoração v se tem, para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, bem como $v(\varphi) = 0$.

Exemplo 82:

1. Seja $\Gamma = \{p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$. Então:
    1. $\Gamma \models p_1$.

       (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, *i.e.*, uma valoração tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, em particular, temos $v(p_1) = 1$.)
    2. $\Gamma \models p_2$.

       (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos $v(\neg p_1) = 0$ e, daqui e de $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, segue $v(p_2) = 1$.)
    3. $\Gamma \models p_1 \wedge p_2$.

       (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos necessariamente $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 1$ (como vimos nos exemplos anteriores) e, por isso, temos $v(p_1 \wedge p_2) = 1$.)

Exemplo 82 (cont.):

1. Recorde que $\Gamma = \{p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$.

   4. $\Gamma \not\models p_3$.

      (Existem valorações v tais que $v \models \Gamma$ e $v(p_3) = 0$. Por exemplo, a valoração que atribui valor lógico 1 a p_1 e p_2 e valor lógico 0 às restantes variáveis proposicionais é uma tal valoração.)

   5. $\Gamma \not\models \neg p_1 \vee \neg\, p_2$.

      (Por exemplo, para a valoração v_1 tal que $v_1(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, temos $v_1 \models \Gamma$ e, no entanto, $v_1(\neg p_1 \vee \neg p_2) = 0$.)

   6. $\Gamma \models p_3 \vee \neg p_3$.

      (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, temos $v(p_3 \vee \neg p_3) = 1$. De facto, $p_3 \vee \neg p_3$ é uma tautologia e, como tal, o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração (em particular, para aquelas valorações que satisfazem Γ).)

Exemplo 82 (cont.):

2. Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$.

   De facto, para qualquer valoração v,
   se $v(\varphi) = 1$ e $v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3. Já a afirmação "para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi \to \psi\} \models \psi$" é falsa.

   Por exemplo, $\{p_1 \to p_2\} \not\models p_2$
   (uma valoração v tal que $v(p_1) = v(p_2) = 0$ satisfaz $\{p_1 \to p_2\}$ e não satisfaz p_2).

Proposição 83: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\models \varphi$ se e só se $\emptyset \models \varphi$.
Dem.:
Suponhamos que φ é uma tautologia.
Então, para toda a valoração v, $v \models \varphi$.
Assim, a implicação "$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi$" é verdadeira (o seu consequente é verdadeiro), pelo que, $\emptyset \models \varphi$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$, *i.e.*, suponhamos que para toda a valoração v,

$$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi.$$

Seja v uma valoração arbitrária.
Pretendemos mostrar que $v \models \varphi$.
Ora, trivialmente, $v \models \emptyset$ (Observação 76).
Assim, da suposição, segue imediatamente $v \models \varphi$. $\square$

Observação 84:

Se Γ é um conjunto de fórmulas inconsistente, então $\Gamma \models \varphi$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. (Porquê?)

Como tal, é possível ter-se $\Gamma \models \varphi$ sem que existam valorações que satisfaçam Γ.

Notação 85: Muitas vezes, no contexto da relação de consequência semântica, usaremos a vírgula para denotar a união de conjuntos e escrevemos uma fórmula para denotar o conjunto singular composto por essa fórmula.

Assim, por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \psi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e conjuntos de fórmulas Γ, Δ, escrevemos:

a) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$;

b) $\Gamma, \varphi \models \psi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$;

c) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \varphi$.

Proposição 86: Sejam φ e ψ fórmulas e sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Delta, \Gamma \models \psi$.

d) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.

e) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração da Proposição 86:

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$

Dem.:

Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$.

Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Γ.

(Queremos mostrar que v satisfaz φ, *i.e.*, $v(\varphi) = 1$.)

Então, da definição de satisfação de conjuntos, sabemos que v atribui valor lógico 1 a todas as fórmulas de Γ.

Assim, dado que por hipótese $\varphi \in \Gamma$, temos $v(\varphi) = 1$.

Dem. da Proposição 86 (cont.):

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$

Dem.:

Seja v uma valoração.

Suponhamos que v satisfaz Δ.

Assim, em particular, v satisfaz Γ, pois (por hipótese) $\Gamma \subseteq \Delta$.

Donde, pela hipótese de que φ é uma consequência semântica de Γ, segue que $v(\varphi) = 1$.

Dem. da Proposição 86 (cont.):

c) Exercício.

d) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$

Dem.:

$\Rightarrow$**)** Seja v uma valoração.

Suponhamos que v satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Então, por definição de satisfação de conjuntos, v satisfaz Γ e $v(\varphi) = 1$ $(*)$.

Assim, como v satisfaz Γ, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$ segue que $v(\varphi \to \psi) = 1$.

Daqui e de $(*)$ segue $v(\psi) = 1$.

$\Leftarrow$**)** Exercício.

Dem. da Proposição 86 (cont.):

e) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$

Dem.:

Seja *v* uma valoração.

Suponhamos que *v* satisfaz Γ.

Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$, podemos concluir que $v(\varphi \to \psi) = 1$ e, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$.

De $v(\varphi \to \psi) = 1$ e de $v(\varphi) = 1$ segue $v(\psi) = 1$. □

Proposição 87: Sejam $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ fórmulas, onde $n \in \mathbb{N}$. As seguintes proposições são equivalentes:

i) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$;

ii) $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi$;

iii) $\models (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$.

Dem.: A equivalência entre ii) e iii) é um caso particular de d) da proposição anterior.

A equivalência entre i) e ii) pode ser demonstrada a partir da equivalência mais geral: para todo o conjunto Γ de fórmulas,

$$\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma, \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi,$$

a qual pode ser demonstrada por indução em n (exercício).

A equivalência entre i) e iii) segue, então, por transitividade. □

Proposição 88: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP. Então:

$\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Dem.:

$\Rightarrow$) Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, *i.e.*, suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Então, v satisfaz Γ e $v(\neg\varphi) = 1$, *i.e.*, $v(\varphi) = 0$ $(*)$. Contudo, da hipótese, uma vez que v satisfaz Γ, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$, o que é contraditório com $(*)$.

Logo, por redução ao absurdo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Dem. Proposição 88 (cont.):

$\Leftarrow$) Suponhamos que v satisfaz Γ.

Então, $v(\neg\varphi) = 0$, de outra forma teríamos $v(\neg\varphi) = 1$, donde, como v satisfaz Γ, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese.

Logo, $v(\varphi) = 1$.

Mostrámos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ também satisfaz φ e, portanto, $\Gamma \models \varphi$. $\square$