Lógica CC
Licenciatura em Ciências da Computação

Luís Pinto

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

$1^{\underline{o}}$. semestre, 2020/2021

2.3 Sistema Formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

Observação 89: O sistema formal de demonstrações que estudaremos nesta secção será notado por DNP e designado por *Dedução Natural Proposicional*.

Observação 90:

O sistema DNP constitui uma certa formalização da noção de *demonstração* para as fórmulas do Cálculo Proposicional, num estilo conhecido como *dedução natural*.

As demonstrações permitirão uma abordagem alternativa à relação de consequência semântica (definida à custa do conceito de valoração) e, em particular, permitirão identificar as tautologias com as fórmulas para as quais podem ser construídas demonstrações.

Exemplo 91:

Demonstrações em DNP serão construídas usando um certo conjunto de *regras de inferência*, que codificam raciocínios elementares utilizados habitualmente na elaboração de demonstrações matemáticas.

Um raciocínio elementar que usamos frequentemente na construção de demonstrações é o seguinte: de φ e $\varphi \to \psi$ podemos concluir ψ. Representaremos este raciocínio do seguinte modo:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Esta regra é habitualmente conhecida por *modus ponens*, embora no formalismo DNP adotemos um nome diferente para esta regra, como veremos adiante.

Outro raciocínio elementar é o seguinte: se assumindo φ por hipótese podemos concluir ψ, então podemos concluir $\varphi \to \psi$.

Utilizemos a notação $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}$ para simbolizar a possibilidade de concluir ψ a partir de φ.

Então, este raciocínio poderá ser representado do seguinte modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}$$

Neste raciocínio, φ é uma *hipótese temporária* usada para concluir ψ. A notação $\cancel{\varphi}$ reflete o facto de que a conclusão $\varphi \to \psi$ já *não depende* da hipótese temporária φ.

Notação 92: O conceito de demonstração em DNP será formalizado adiante, através de uma definição indutiva.

As demonstrações corresponderão a certas *árvores finitas de fórmulas*, onde uma fórmula φ que ocorra como *folha* poderá estar *cancelada*, o que será notado por $\cancel{\varphi}$ ou por $[\varphi]$.

Na apresentação das regras de inferência de *DNP*, usaremos a notação

$$\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \psi \end{array}$$

para representar uma árvore de fórmulas cuja *raiz* é ψ e cujas eventuais ocorrências da fórmula φ como folha estão necessariamente canceladas.

Definição 93:

As *regras de inferência* do sistema formal DNP são apresentadas de seguida.

Cada regra origina uma regra na definição indutiva do *conjunto das derivações* (Definição 95).

As regras de inferência recebem derivações (uma ou mais) e produzem uma nova derivação.

*Regras de **I**ntrodução* *Regras de **E**liminação*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \to E$$

Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do *traço de inferência* serão chamadas as *premissas* da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a *conclusão* da regra de inferência.

Uma *aplicação* ou *instância* de uma regra de inferência é uma *substituição das fórmulas da regra (meta-variáveis) por fórmulas do CP*.

Chamaremos *inferência* a uma aplicação de uma regra de inferência.

Regras de **I***ntrodução* *Regras de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots \\ \varphi & & \psi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge I$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\varphi}\ \wedge_1 E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\psi}\ \wedge_2 E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ \neg I$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots \\ \varphi & & \neg\varphi\end{matrix}}{\bot}\ \neg E$$

Regras de ***I****ntrodução*

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi\vee\psi}\ \vee_1 I \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\vee\psi}\ \vee_2 I$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi\leftrightarrow\psi}\ \leftrightarrow I$$

Regras de ***E****liminação*

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\vee\psi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array}\qquad\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\ \vee E$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{array}}{\psi}\ \leftrightarrow_1 E \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\leftrightarrow\psi\end{array}}{\varphi}\ \leftrightarrow_2 E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\varphi}\ (RAA) \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \perp\end{array}}{\varphi}\ (\perp)$$

Exemplo 94: Vejamos dois exemplos de inferências $\wedge_1 E$:

$$\frac{p_1 \wedge p_2}{p_1}\,\wedge_1 E \qquad \frac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\,\wedge_1 E \tag{1}$$

Estas duas inferências podem ser *combinadas* do seguinte modo:

$$\cfrac{\cfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\,\wedge_1 E}{p_1}\,\wedge_1 E \tag{2}$$

Combinando esta construção com uma inferência $\rightarrow I$ podemos obter:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\,(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)\,]}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)) \rightarrow p_1}\ \rightarrow I \tag{3}$$

As duas inferências em (1), assim como as combinações de inferências em (2) e (3), são exemplos de *derivações* no sistema formal DNP.

Definição 95: O *conjunto* $\mathcal{D}^{DNP}$ *das derivações de* DNP é o menor conjunto X, de árvores finitas de fórmulas, com folhas possivelmente canceladas, tal que:

a) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a árvore cujo único nodo é φ pertence a X;

b) X é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DNP; por exemplo, X é fechado para as regras $\rightarrow E$ e $\rightarrow I$ quando as seguintes condições são satisfeitas (respetivamente):

i) $\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array} \in X$ e $\begin{array}{c} D_2 \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \in X \implies \dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2 \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array}}{\psi} \rightarrow E \in X$;

ii) $\begin{array}{c} D \\ \psi \end{array} \in X \implies \left(\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I \right) \in X$

(onde: $\begin{array}{c} D \\ \psi \end{array}$ denota uma árvore de fórmulas cuja raiz é ψ; e

$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$ denota a árvore de fórmulas obtida de D adicionando um novo nodo $\varphi \to \psi$, que passa a ser a nova raiz e tem por único *descendente* a raiz de D, e cancelando todas as eventuais ocorrências de φ como folha).

As derivações de DNP são também chamadas *deduções*.

No nosso estudo, privilegiaremos a terminologia derivação.

A terminologia *demonstração* será reservada para uma classe especial de derivações (ver Definição 99).

Observação 96:

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP admite princípios de indução estrutural e de recursão estrutural.

Existe também um conceito natural de *subderivação*.

Por exemplo, a derivação (3) do Exemplo 94 tem as seguintes quatro subderivações:

$$(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)\,, \qquad \dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E\,,$$

$$\dfrac{\dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E\,, \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\,(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)\,]}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \rightarrow \neg p_3)) \rightarrow p_1} \rightarrow I\,.$$

De facto, estas quatro derivações, lidas como uma sequência, constituem uma sequência de formação da derivação (3).

Exemplo 97: Para quaisquer fórmulas do CP φ, ψ e σ, as construções abaixo são exemplos de derivações de DNP.

1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\psi}\wedge_2 E \qquad \psi\to(\varphi\to\sigma)}{\varphi\to\sigma}\to E}{\sigma}\to E}{(\varphi\wedge\psi)\to\sigma}\to I^{(1)}$$

Os números naturais que aparecem a anotar inferências e fórmulas canceladas estabelecem uma correspondência, unívoca, entre as fórmulas canceladas e as regras que permitem efetuar esses cancelamentos.

2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(2)} \qquad \neg\cancel{\neg\varphi}^{(1)}}{\bot}\;\neg E}{\varphi}\;RAA^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\;\to I^{(1)}$$

3)

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\psi \to \varphi}\;\to I^{(2)}}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\;\to I^{(1)}$$

Note-se que em **3)**, a inferência $\to I$ anotada com (1) é utilizada para cancelar a única ocorrência como folha de φ, enquanto que a inferência $\to I$ anotada com (2) não é utilizada para efetuar qualquer cancelamento.

Definição 98: Numa derivação D:

- a raiz é chamada a *conclusão* de D;
- as folhas são chamadas as *hipóteses* de D;
- as folhas canceladas são chamadas as *hipóteses canceladas* de D;
- as folhas não canceladas são chamadas as *hipóteses não canceladas* de D.

Definição 99: Seja D uma derivação de DNP e φ uma fórmula do Cálculo Proposcional.

- Diremos que D é uma *derivação* de φ *a partir de* um conjunto de fórmulas Γ quando φ é a conclusão de D e o conjunto das hipóteses não canceladas de D é um subconjunto de Γ.
- Diremos que D é uma *demonstração* de φ quando D é uma derivação de φ a partir do conjunto vazio.

Exemplo 100: Sejam φ, ψ e σ fórmulas.

a) Seja D_1 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)} \qquad \varphi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \cancel{\psi \to \sigma}^{(1)}}{\sigma} \to E}{\varphi \to \sigma} \to I^{(2)}}{(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)} \to I^{(1)}$$

Então:

1. o conjunto de hipóteses de D_1 é $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \sigma\}$;
2. o conjunto de hipóteses não canceladas de D_1 é $\{\varphi \to \psi\}$;
3. a conclusão de D_1 é $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$;
4. D_1 é uma derivação de $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ a partir de $\{\varphi \to \psi\}$.

b) Seja D_2 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \cancel{\wedge} \neg\varphi^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\varphi \cancel{\wedge} \neg\varphi^{(1)}}{\neg\varphi}\wedge_2 E}{\perp}\neg E}{\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)}\neg I^{(1)}$$

Então:

1. o conjunto de hipóteses de D_2 é $\{\varphi \wedge \neg\varphi\}$;
2. o conjunto de hipóteses não canceladas de D_2 é vazio;
3. a conclusão de D_2 é $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$;
4. D_2 é uma demonstração de $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Definição 101:

Diremos que uma fórmula φ é *consequência sintática* de um conjunto de fórmulas Γ ou que φ é *derivável a partir de* Γ (notação: $\Gamma \vdash \varphi$) quando existem derivações em DNP de φ a partir de Γ.

Escreveremos $\Gamma \nvdash \varphi$ para denotar que φ não é consequência sintática de Γ.

Definição 102:

Uma fórmula φ diz-se um *teorema* de DNP (notação: $\vdash \varphi$) quando existe uma demonstração de φ.

Escreveremos $\nvdash \varphi$ para denotar que φ não é teorema de DNP.

Proposição 103: Para toda a fórmula φ, φ é teorema de DNP se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Dem.: Imediata a partir das definições. $\square$

Exemplo 104: Atendendo ao exemplo anterior:

1. $\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$
   (*i.e.*, $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ é consequência sintática de $\{\varphi \to \psi\}$);

2. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
   (*i.e.*, $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ é um teorema de DNP).

Definição 105: Um conjunto de fórmulas Γ diz-se *sintaticamente inconsistente* quando $\Gamma \vdash \bot$ e diz-se *sintaticamente consistente* no caso contrário (i.e. quando $\Gamma \nvdash \bot$, ou seja, quando não existem derivações de $\bot$ a partir de Γ).

Exemplo 106:

O conjunto $\Gamma = \{p_0, p_0 \leftrightarrow p_1, p_0 \leftrightarrow \neg p_1\}$ é sintaticamente inconsistente.

Uma derivação de $\perp$ a partir de Γ é:

$$\dfrac{\dfrac{p_0 \quad p_0 \leftrightarrow p_1}{p_1}\leftrightarrow_1 E \qquad \dfrac{p_0 \quad p_0 \leftrightarrow \neg p_1}{\neg p_1}\leftrightarrow_1 E}{\perp}\neg E$$

Proposição 107: Seja Γ um conjunto de fórmulas.

As seguintes afirmações são equivalentes:

a) Γ é sintaticamente inconsistente;

b) para alguma fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$;

c) para toda a fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Por exemplo, é suficiente provar as implicações **a)**$\Rightarrow$**b)**, **b)**$\Rightarrow$**c)** e **c)**$\Rightarrow$**a)**.

a)$\Rightarrow$**b)**: Admitindo que Γ é sintaticamente inconsistente, existe uma derivação D de $\perp$ a partir de Γ.
Assim, fixando uma (qualquer) fórmula φ, tem-se que

$$D_1 = \cfrac{\begin{array}{c}D\\ \perp\end{array}}{\varphi}\,(\perp) \qquad\qquad D_2 = \cfrac{\begin{array}{c}D\\ \perp\end{array}}{\neg\varphi}\,(\perp)$$

(as derivações D_1 e D_2 obtidas de D acrescentando, em ambos os casos, uma inferência final $(\perp)$, com conclusão φ e $\neg\varphi$, respetivamente) são, respetivamente, derivações de
(i) φ a partir de Γ (a conclusão de D_1 é φ e as hipóteses não canceladas de D_1 são as mesmas que em D); e de
(ii) $\neg\varphi$ a partir de Γ (a conclusão de D_2 é $\neg\varphi$ e as hipóteses não canceladas de D_2 são as mesmas que em D).
Por conseguinte, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Exercício: prove as outras duas implicações. $\square$

Notação 108:

Na representação de consequências sintáticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas.

Por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, a notação $\Gamma, \Delta, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ abrevia $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Proposição 109: Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas. Então:

a) se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$;

b) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$;

c) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Delta, \Gamma \vdash \psi$;

d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$;

e) se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Delta \vdash \varphi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

Demonstração da Proposição 109:

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.:

Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$.

Então, a árvore cuja única fórmula é φ é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ, pois $\varphi \in \Gamma$.

Assim, encontrámos uma derivação de φ a partir de Γ, pelo que $\Gamma \vdash \varphi$.

b), **c)** e **e)**: Exercício.

Dem. da Proposição 109 (cont.):

d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$

$\Rightarrow$): Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ.
Então,

$$D' = \dfrac{\varphi \quad \overset{D}{\varphi \to \psi}}{\psi} \to E$$

(D' é a derivação cuja última inferência é $\to E$ e as derivações das premissas são φ e D, respetivamente) é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, pois:
i) ψ é a conclusão de D'; e
ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas de D' é constituído por φ e pelas hipóteses não canceladas de D, que formam um subconjunto de Γ, sendo portanto Δ um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Dem. da Proposição 109 (cont.):

$\Leftarrow$): Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.
Então, a derivação

$$D' = \quad \dfrac{\begin{matrix} \cancel{\varphi}^{\,(1)} \\ D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to I^{(1)},$$

(D' é a derivação obtida de D acrescentando uma inferência final $\to I$, que cancela todas as ocorrências de φ como hipótese) é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ, pois:

i) $\varphi \to \psi$ é a conclusão de D'; e

ii) o conjunto Δ das hipóteses não canceladas de D' é constituído por todas as hipóteses não canceladas de D (um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$), exceto φ e, portanto, Δ é um subconjunto de Γ. $\square$

Teorema 110 (*Correção*): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \vdash \varphi, \text{ então } \Gamma \models \varphi.$$

Dem.:

Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de φ a partir de Γ.

Aplicando o lema que se segue, conclui-se de imediato o resultado pretendido.

> **Lema:** Para todo $D \in \mathcal{D}^{DNP}$, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Dem. do Teorema da Correção (cont.):

Lema: Para todo $D \in \mathcal{D}^{DNP}$, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Dem. do Lema: Por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação, de φ a partir de Γ, com um único nodo.

Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$.

Donde, pela Proposição 86 (a), $\Gamma \models \varphi$.

Dem. do Teorema da Correção (cont.):

b) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma}\to I.$$

Então:
(i) $\varphi = \psi \to \sigma$ e
(ii) D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$.
Assim, aplicando a hipótese de indução relativa à subderivação D_1, $\Gamma, \psi \models \sigma$.
Donde, pela Proposição 86 (d), $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

Dem. do Teorema da Correção (cont.):

c) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 & D_2 \\ \sigma & \sigma \to \psi \end{matrix}}{\psi} \to E.$$

Então:
(i) $\varphi = \psi$;
(ii) D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ; e
(iii) D_2 é uma derivação de $\sigma \to \psi$ a partir de Γ.

Assim, aplicando as hipóteses de indução relativas às subderivações D_1 e D_2, segue $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \psi$, respetivamente.

Daqui, pela Proposição 86 (e), conclui-se $\Gamma \models \psi$.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D, são deixados como exercício. $\square$

Observação 111:

O Teorema da Correção constitui uma ferramenta para provar a não derivabilidade de fórmulas a partir de conjuntos de fórmulas.

De facto, do Teorema da Correção segue que

$$\Gamma \not\models \varphi \Longrightarrow \Gamma \nvdash \varphi,$$

o que significa que, para mostrar que não existem derivações em DNP de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ, basta mostar que φ não é consequência semântica de Γ.

Exemplo 112: Seja $\Gamma = \{p_1 \vee p_2, p_1 \to p_0\}$.

1. Em DNP não existem derivações de $p_0 \vee p_1$ a partir de Γ. Se existisse uma tal derivação, pelo Teorema da Correção, teríamos $\Gamma \models p_0 \vee p_1$, mas esta consequência semântica não é válida (tome-se, por exemplo, a valoração que atribui 1 a p_2 e 0 às restantes variáveis proposicionais).
2. De forma análoga, pode mostrar-se que não existem derivações de $\perp$ a partir de Γ (exercício) e, então, concluir que Γ é sintaticamente consistente.

Definição 113: Um conjunto de fórmulas Γ diz-se *maximalmente consistente* quando:

i) Γ é sintaticamente consistente; e

ii) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$.

Proposição 114: Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$.
Se Γ é maximalmente consistente e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.

Dem.:
Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\varphi \notin \Gamma$.
Logo, por Γ ser maximalmente consistente, $\neg\varphi \in \Gamma$.
Por hipótese, existe uma derivação D de φ a partir de Γ.
Assim, podemos construir a seguinte derivação de $\perp$ a partir de Γ

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array} \quad \neg\varphi}{\perp}\ \neg E.$$

e concluir que Γ é sintaticamente inconsistente, uma contradição com a hipótese de Γ ser maximalmente consistente.
Logo, por redução ao absurdo, $\varphi \in \Gamma$. $\square$

Proposição 115: Se Γ é um conjunto de fórmulas sintaticamente consistente, então existe um conjunto de fórmulas Γ^* tal que: **i)** $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ e **ii)** Γ^* é maximalmente consistente.

Dem.: Prova-se que $\mathcal{F}^{CP}$ é um conjunto numerável.
Seja $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n, ...$ uma enumeração de $\mathcal{F}^{CP}$.
Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, Γ_n como:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Gamma; \\ \Gamma_{n+1} &= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ é sintaticamente consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ é sintaticamente inconsistente} \end{cases} \end{aligned}$$

Demonstra-se que $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma_n$ satisfaz **i)** e **ii)**, com o auxílio do seguinte lema:

Lema: Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, Γ_n é sintaticamente consistente.

Este lema demonstra-se por indução em $\mathbb{N}_0$. □

Proposição 116: Se Γ é um conjunto de fórmulas sintaticamente consistente, então Γ é semanticamente consistente.

Dem.: Suponhamos que Γ é um conjunto sintaticamente consistente. Então, pela proposição anterior existe um conjunto Γ^*, maximalmente consistente, que contém Γ. Seja v a única valoração tal que,

$$\text{para todo } p \in \mathcal{V}^{CP},\ v(p) = \begin{cases} 1 & se\ p \in \Gamma^* \\ 0 & se\ p \notin \Gamma^* \end{cases}.$$

Demonstra-se que:

Lema: $v(\varphi) = 1$ sse $\varphi \in \Gamma^*$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Deste lema, uma vez que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ e que $v(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \Gamma^*$, concluimos que v satisfaz Γ e, assim, Γ é semanticamente consistente.

$\square$

Dem. Prop. 115 (cont.):

O lema anterior,

$$v(\varphi) = 1 \text{ sse } \varphi \in \Gamma^*, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP},$$

é demonstrado por indução estrutural em fórmulas do Cálculo Proposicional.

A sua demonstração evidencia a necessidade das várias regras de inferência do sistema DNP.

□

Teorema 117 (Equivalência entre consistências sintática e semântica): Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então: Γ é sintaticamente consistente sse Γ é semanticamente consistente.

Dem.:

$\Rightarrow$) Proposição 116.

$\Leftarrow$) Tendo em vista um absurdo, suponhamos que Γ é sintaticamente inconsistente, *i.e.*, $\Gamma \vdash \bot$.
Então, pelo Teorema da Correção,

$$\Gamma \models \bot \,. \quad (*)$$

Como (por hipótese) Γ é semanticamente consistente, existe uma valoração v que satisfaz Γ.
Daqui, por $(*)$, segue $v(\bot) = 1$, o que contradiz a definição de valoração.
Logo, por redução ao absurdo, Γ é sintaticamente consistente.

□

Observação 118: No resto desta secção, uma vez que consistência semântica de um conjunto de fórmulas é equivalente à sua consistência sintática, simplificaremos a terminologia e referir-nos-emos apenas a *consistência de conjuntos de fórmulas*.

Teorema 119 (Completude): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \models \varphi, \text{ então } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Provaremos o contrarrecíproco. Suponhamos $\Gamma \nvdash \varphi$. Então, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é sintaticamente consistente, de outra forma, existiria uma derivação D de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ e, assim,

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\neg\varphi}^{(1)} \\ D \\ \perp \end{array}}{\varphi} RAA^{(1)}$$

(onde todas as ocorrências de $\neg\varphi$ como hipótese de D ficam canceladas com a aplicação de RAA) seria uma derivação de φ a partir de Γ, contrariando a suposição $\Gamma \nvdash \varphi$.
Sendo $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ sintaticamente consistente, segue da Proposição 116 que existe uma valoração v tal que $v \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.
Assim, $v \models \Gamma$ e $v(\varphi) = 0$, donde $\Gamma \not\models \varphi$. $\square$

Teorema 120 (Adequação): Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ sse } \Gamma \models \varphi.$$

Dem.: Imediata, a partir dos teoremas da Correção e da Completude. $\square$

Corolário 121: Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Então,

$$\varphi \text{ é um teorema de DNP sse } \varphi \text{ é uma tautologia.}$$

Dem.: Exercício. $\square$

Teorema 122 (Compacidade): Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então, Γ é consistente sse todo o subconjunto finito de Γ é consistente.

Dem.:

$\Rightarrow$) Imediata (recorde-se a Proposição 80).

$\Leftarrow$) Tendo em vista um absurdo, suponhamos que Γ é sintaticamente inconsistente.
Então, existe uma derivação D de $\perp$ a partir de Γ.
Seja Γ' o conjunto das hipóteses não canceladas de D, que, por definição de derivação, é finito.
Assim, D é também uma derivação de $\perp$ a partir de Γ', ou seja, Γ' é sintaticamente inconsistente.
Mas, isto contradiz a hipótese inicial, uma vez que Γ' seria um subconjunto de Γ finito e inconsistente.
Logo, por redução ao absurdo, Γ é sintaticamente consistente.

$\square$