Definição (Regras de Inferência)

As regras de inferência do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (DNP) são as seguintes:

*Regras de **I**ntrodução* | *Regras de **E**liminação*

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi\wedge\psi}\,\wedge I \qquad\qquad \frac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}\,\wedge_1 E \qquad \frac{\varphi\wedge\psi}{\psi}\,\wedge_2 E$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,\to I \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \varphi\to\psi}{\psi}\,\to E$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,\neg I \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\,\neg E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi\vee\psi}\,\vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi\vee\psi}\,\vee_2 I \qquad\qquad \frac{\varphi\vee\psi \quad \begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\,\vee E$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi\leftrightarrow\psi}\,\leftrightarrow I \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \varphi\leftrightarrow\psi}{\psi}\,\leftrightarrow_1 E \qquad \frac{\psi \quad \varphi\leftrightarrow\psi}{\varphi}\,\leftrightarrow_2 E$$

$$\frac{\bot}{\varphi}\,(\bot) \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,(RAA)$$

Definição

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP (também chamadas deduções ou demonstrações) é o conjunto de árvores de fórmulas anotadas gerado pelo conjunto de regras indutivas que contém uma única regra base que é

$$\frac{}{\varphi\in\mathcal{D}^{DNP}}\,RB\ ,$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ, e que contém uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNP de tipo semelhante às dos seguintes exemplos: as regras indutivas que correspondem às regras de inferência $\to I$ e $\to E$ são, resp.,

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi\\ D\\ \psi\end{array}\ \in\mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,\to I\ \in\mathcal{D}^{DNP}}\,RI_{\to I} \quad \text{e} \quad \frac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array}\ \in\mathcal{D}^{DNP} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi\to\psi\end{array}\ \in\mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi\to\psi\end{array}}{\psi}\,\to E\ \in\mathcal{D}^{DNP}}\,RI_{\to E}$$

Sendo $\mathcal{D}^{DNP}$ um conjunto definido indutivamente, existe um princípio de indução estrutural que lhe está associado.

A definição indutiva de $\mathcal{D}^{DNP}$ é determinista, como tal, existe também um teorema de recursão estrutural para $\mathcal{D}^{DNP}$.

Os subobjetos de uma derivação D são chamados subderivações de D.

Definições

Numa derivação D:

- a raiz de D é chamada a conclusão de D;
- as folhas de D são chamadas as hipóteses de D;
- as folhas de D anotadas com um corte são chamadas as hipóteses canceladas (ou cortadas) e as folhas de D sem qualquer anotação chamadas as hipóteses não canceladas (ou não cortadas) de D.

Definição

Uma fórmula φ diz-se derivável a partir de um conjunto Γ de fórmulas, ou uma consequência sintática de Γ, se existir uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses **não canceladas** é um subconjunto de Γ. Em tal caso, escreve-se $\Gamma\vdash\varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ a partir de Γ.

Definição

Uma fórmula φ diz-se um teorema de DNP se existir uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Em tal caso, escreve-se $\vdash\varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ.

Teorema

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi\in\Gamma$, então $\Gamma\vdash\varphi$.

ii) Se $\Gamma\vdash\varphi$ e $\Gamma\subseteq\Delta$, então $\Delta\vdash\varphi$.

iii) Se $\Gamma\vdash\varphi$ e $\Delta,\varphi\vdash\psi$, então $\Gamma,\Delta\vdash\psi$.

iv) $\Gamma\vdash\varphi\to\psi$ se e só se $\Gamma,\varphi\vdash\psi$. Em particular, quando $\Gamma=\emptyset$ tem-se, $\emptyset\vdash\varphi\to\psi$ se e só se $\varphi\vdash\psi$.

v) Se $\Gamma\vdash\varphi\to\psi$ e $\Gamma\vdash\varphi$, então $\Gamma\vdash\psi$.

Demonstração (continuação).

iv)

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma\vdash\varphi\to\psi$. Então existe uma derivação D de $\varphi\to\psi$ a partir de Γ. Logo,

$$\frac{\varphi \quad \begin{array}{c}D\\ \varphi\to\psi\end{array}}{\psi}\,\to E$$

é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma\cup\{\varphi\}$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma,\varphi\vdash\psi$. Então, existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma\cup\{\varphi\}$. Logo, a derivação

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\,\to I$$

onde todas as ocorrências de φ (como folha) em D são canceladas, com a aplicação de $\to I$, é uma derivação de $\varphi\to\psi$ a partir de Γ. □

Lema

Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma\models\varphi$.

Demonstração

A demonstração faz-se por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação de φ a partir de Γ com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi\in\Gamma$. Donde, $\Gamma\models\varphi$.

b) Se D é da forma

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{array}}{\psi\to\sigma}\,\to I$$

então $\varphi=\psi\to\sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma\cup\{\psi\}$. Aplicando a hipótese de indução à subderivação D_1 de D, vem que $\Gamma,\psi\models\sigma$. Portanto, $\Gamma\models\psi\to\sigma$.

c) Se D é uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\frac{\begin{array}{c}D_1\\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}D_2\\ \sigma\to\psi\end{array}}{\psi}\,\to E$$

então: $\varphi=\psi$; D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ e D_2 é uma derivação de $\sigma\to\psi$ a partir de Γ. Assim, aplicando a hipótese de indução a D_1 e a D_2, $\Gamma\models\sigma$ e $\Gamma\models\sigma\to\psi$, respetivamente. Donde, $\Gamma\models\psi$.

Teorema da Correção

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma\vdash\varphi$, então $\Gamma\models\varphi$.

Teorema da Completude

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma\models\varphi$, então $\Gamma\vdash\varphi$.

Teorema da Adequação

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ, $\Gamma\vdash\varphi$ se e só se $\Gamma\models\varphi$.

Corolário

Para toda a fórmula φ,
φ é um teorema se e só se φ é uma tautologia.

Definição

Um *tipo de linguagem* é um terno $L=(\mathcal{F},\mathcal{R},\mathcal{N})$, em que:

1. $\mathcal{F}$ é um conjunto enumerável de símbolos chamados *símbolos de função*;
2. $\mathcal{R}$ é um conjunto enumerável de símbolos chamados *símbolos de relação* ou *símbolos de predicado*;
3. $\mathcal{N}$ é uma função $\begin{array}{ccc}\mathcal{F}\cup\mathcal{R} & \to & \mathbb{N}_0\\ s & \mapsto & \mathcal{N}(s)\end{array}$ sendo $\mathcal{N}(s)$ designado a *aridade* de s.

Os símbolos de função de aridade 0 são chamados *constantes* e o seu conjunto é vulgarmente representado por $\mathcal{C}$.

Exemplo

$$L_{Arit}=(\{0,s,+,\times\},\{=,<\},\mathcal{N})$$

onde $\mathcal{N}(0)=0$, $\mathcal{N}(s)=1$, $\mathcal{N}(+)=2$, $\mathcal{N}(\times)=2$, $\mathcal{N}(=)=2$ e $\mathcal{N}(<)=2$, é um tipo de linguagem.

Definição

O *alfabeto* $\mathcal{A}_L$, do Cálculo de Predicados, de um tipo de linguagem L é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

1. símbolos de função e símbolos de predicado de L;
2. os conectivos proposicionais $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$ e $\leftrightarrow$;
3. $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots$, chamados *variáveis*, formando um conjunto numerável representado por $\mathcal{V}$;
4. $\exists$ e $\forall$, chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal*, respetivamente;
5. "(", ")" e ",".

Definição

O conjunto $\mathcal{T}_L$ dos *L-termos* é o subconjunto de $\mathcal{A}_L^+$ definido indutivamente pelas seguintes regras:

1. para cada $x_i\in\mathcal{V}$, $\quad \dfrac{}{x_i\in\mathcal{T}_L}\,x_i$;
2. para cada $c\in\mathcal{C}$, $\quad \dfrac{}{c\in\mathcal{T}_L}\,c$;
3. para cada símbolo de função f de L, de aridade $n\geq 1$,

$$\frac{t_1\in\mathcal{T}_L \quad \cdots \quad t_n\in\mathcal{T}_L}{f(t_1,\ldots,t_n)\in\mathcal{T}_L}\,f$$

Definição

Chamaremos *subtermos* aos subobjetos de um L-termo

Exemplo

O conjunto dos subtermos de $0+s(x_2)$ é

$$\{0+s(x_2),0,s(x_2),x_2\}.$$

A sequência de objetos $x_2,s(x_2),0,0+s(x_2)$ é uma sequência de formação de $0+s(x_2)$.

Princípio de Indução Estrutural para *L*-Termos

Seja $P(t)$ uma propriedade que depende de um L-termo t e suponhamos que:

1. para todo o $x\in\mathcal{V}$, $P(x)$ é válida;
2. para todo o $c\in\mathcal{C}$, $P(c)$ é válida;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n\geq 1$, e para todos os $t_1,\ldots,t_n\in\mathcal{T}_L$, se $P(t_1),\ldots,P(t_n)$ são válidas, então $P(f(t_1,\ldots,t_n))$ é válida.

Então $P(t)$ é válida, para todo o L-termo t.

Teorema de Recursão Estrutural para *L*-Termos

Sejam Y um conjunto, $g_{\mathcal{V}}:\mathcal{V}\to Y$ e $g_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}\to Y$ funções e seja, para cada símbolo de função f, de aridade $n\geq 1$, $g_f:Y^n\to Y$ uma função. Então, existe uma e uma só função $G:\mathcal{T}_L\to Y$ tal que:

1. para todo o $x\in\mathcal{V}$, $G(x)=g_{\mathcal{V}}(x)$;
2. para todo o $c\in\mathcal{C}$, $G(c)=g_{\mathcal{C}}(c)$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n\geq 1$, e para quaisquer $t_1,\ldots,t_n\in\mathcal{T}_L$,

$$G(f(t_1,\ldots,t_n))=g_f(G(t_1),\ldots,G(t_n),t_1,\ldots,t_n).$$

Definição

O conjunto $\mathrm{VAR}(t)$, das *variáveis que ocorrem* num L-termo t, é definido, por recursão estrutural em t, como:

1. para todo o $x\in\mathcal{V}$, $\mathrm{VAR}(x)=\{x\}$;
2. para todo o $c\in\mathcal{C}$, $\mathrm{VAR}(c)=\emptyset$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n\geq 1$, e para quaisquer $t_1,\ldots,t_n\in\mathcal{T}_L$,

$$\mathrm{VAR}(f(t_1,\ldots,t_n))=\mathrm{VAR}(t_1)\cup\cdots\cup\mathrm{VAR}(t_n).$$

Definição

O L-termo que resulta da *substituição*, num L-termo t_0, de uma variável x por um L-termo t, que notaremos por $t_0[t/x]$, é definido, por recursão estrutural em t_0, como:

1. para todo o $y\in\mathcal{V}$, $y[t/x]=\begin{cases} t & \text{se } y=x\\ y & \text{se } y\neq x\end{cases}$;
2. para todo o $c\in\mathcal{C}$, $c[t/x]=c$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n\geq 1$, e para quaisquer $t_1,\ldots,t_n\in\mathcal{T}_L$,

$$f(t_1,\ldots,t_n)[t/x]=f(t_1[t/x],\ldots,t_n[t/x]).$$

Definição

Uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{A}_L$, da forma

$$R(t_1,\ldots,t_n)$$

onde $R\in\mathcal{R}$ tem aridade n e $t_1,\ldots,t_n\in\mathcal{T}_L$, é chamada uma *L-fórmula atómica*.

O conjunto das L-fórmulas atómicas representa-se por At_L.

Exemplo

As palavras $<(x_0,s(0))$ e $=(x_0,x_1)$, sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, são L_{Arit}-fórmulas atómicas.

Definição

O conjunto das *L-fórmulas*, que notamos por $\mathcal{F}_L$, é o conjunto definido indutivamente, sobre o conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$, pelas regras:

1. $\dfrac{}{\bot\in\mathcal{F}_L}\,\bot$;
2. $\dfrac{}{\varphi\in\mathcal{F}_L}\,\mathrm{At}_L$, para cada L-fórmula atómica φ;
3. $\dfrac{\varphi\in\mathcal{F}_L}{(\neg\varphi)\in\mathcal{F}_L}\,\neg$;
4. $\dfrac{\varphi\in\mathcal{F}_L \quad \psi\in\mathcal{F}_L}{(\varphi\Box\psi)\in\mathcal{F}_L}\,\Box$, para cada $\Box\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$;
5. $\dfrac{\varphi\in\mathcal{F}_L}{(\exists x\varphi)\in\mathcal{F}_L}\,\exists_x \qquad \dfrac{\varphi\in\mathcal{F}_L}{(\forall x\varphi)\in\mathcal{F}_L}\,\forall_x$.

Definição

Aos subobjetos de uma L-fórmula φ chamaremos *subfórmulas* de φ.

Princípio de Indução Estrutural em *L*-Fórmulas

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade que depende de uma L-fórmula φ, e suponhamos que:

1. $P(\bot)$ é válida;
2. para cada $\psi\in\mathrm{At}_L$, $P(\psi)$ é válida;
3. para cada $\psi\in\mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$ é válida, então $P(\neg\psi)$ é válida;
4. para quaisquer $\Box\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$ e $\psi,\sigma\in\mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$ e $P(\sigma)$ são válidas, então $P(\psi\Box\sigma)$ é válida;
5. para quaisquer $Q\in\{\exists,\forall\}$, $x\in\mathcal{V}$ e $\psi\in\mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$ é válida, então $P(Q_x\psi)$ é válida.

Então $P(\varphi)$ é válida, para toda a L-fórmula φ.

Teorema de Recursão Estrutural em *L*-fórmulas

Sejam Y um conjunto e $y\in Y$ e sejam $g:\mathrm{At}_L\to Y$, $g_\neg:Y\to Y$, $g_\Box:Y\times Y\to Y$ (para cada $\Box\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$) e $g_Q:Y\to Y$ (para cada $Q\in\{\exists,\forall\}$) funções. Então, existe uma e uma só função $G:\mathcal{F}_L\to Y$ tal que:

1. $G(\bot)=y$;
2. para qualquer $\varphi\in\mathrm{At}_L$, $G(\varphi)=g(\varphi)$;
3. para qualquer $\varphi\in\mathcal{F}_L$, $G(\neg\varphi)=g_\neg(G(\varphi),\varphi)$;
4. para quaisquer $\Box\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$ e $\varphi,\psi\in\mathcal{F}_L$,

$$G(\varphi\Box\psi)=g_\Box(G(\varphi),G(\psi),\varphi,\psi);$$

5. para quaisquer $Q\in\{\exists,\forall\}$, $x\in\mathcal{V}$ e $\varphi\in\mathcal{F}_L$,

$$G(Q_x\varphi)=g_Q(G(\varphi),\varphi).$$

Definição

Dada uma subfórmula de uma L-fórmula φ da forma $Q_x\psi$, em que $Q\in\{\exists,\forall\}$ e $x\in\mathcal{V}$, a L-fórmula ψ é chamada o *alcance* dessa ocorrência do quantificador Q_x.

Definição

Numa L-fórmula φ, uma ocorrência numa subfórmula atómica de φ de uma variável x diz-se

- *livre* quando essa ocorrência não está no alcance de nenhum quantificador Q_x (com $Q \in \{\exists, \forall\}$);
- *ligada*, caso contrário.

Denota-se

$$\mathrm{LIV}(\varphi) = \{\text{variáveis que têm ocorrências livres em } \varphi\};$$
$$\mathrm{LIG}(\varphi) = \{\text{variáveis que têm ocorrências ligadas em } \varphi\}.$$

Definição

A L-fórmula obtida por *substituição* numa L-fórmula φ de todas as ocorrências livres de uma variável x por um L-termo t, notada $\varphi[t/x]$, é definida por recursão estrutural em φ por:

1. $\bot[t/x] = \bot$;
2. para todo o símbolo de relação R, de aridade n, e para quaisquer $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,
   $$R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]);$$
3. para todo o $\psi \in \mathcal{F}_L$, $\quad (\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$;
4. para quaisquer $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$,
   $$(\psi_1 \Box \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \Box \psi_2[t/x];$$
5. para quaisquer $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$,
   $$(Q_y\psi)[t/x] = \begin{cases} Q_y\psi & \text{se } \ y = x \\ Q_y\psi[t/x] & \text{se } \ y \neq x \ . \end{cases}$$

Definição

Uma variável x diz-se *substituível* por um L-termo t numa L-fórmula φ, quando

- não existem ocorrências livres de x no alcance de Q_y, em que $Q \in \{\exists, \forall\}$ e $y \in \mathrm{VAR}(t)$,

ou, equivalentemente, quando

- para toda a ocorrência livre de x em φ, se essa ocorrência está no alcance de Q_y, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, então $y \notin \mathrm{VAR}(t)$.

Exemplo

Sejam
$$\varphi = \forall_{x_1}(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2) \quad e \quad t = x_1 + s(x_2).$$

- x_0 é substituível por t em φ, pois x_0 não tem ocorrências livres em φ.
- x_1 é substituível por t em φ, pois a única ocorrência livre de x_1 em φ não se encontra no alcance de quantificadores.
- x_2 não é substituível por t em φ, uma vez que x_2 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall_{x_1}$ e $x_1 \in \mathrm{VAR}(t)$.

Em φ existem duas ocorrências livres de x_2. Uma delas está no alcance de um único quantificador, $\forall_{x_1}$. A outra ocorrência não está no alcance de qualquer quantificador. Logo, x_2 é substituível por um L-termo t em φ se e só se $x_1 \notin \mathrm{VAR}(t)$.

Definição

Uma L-fórmula φ diz-se uma *L-sentença*, ou uma *L-fórmula fechada*, quando não tem ocorrências livres de variáveis, i.e., $\mathrm{LIV}(\varphi) = \emptyset$.

Corolário

Sejam φ uma L-sentença, x uma variável e t um L-termo. Então, $\varphi[t/x] = \varphi$.

Exemplo 1

Seja $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{\ })$, onde:

- $\overline{0}$ é o número natural *zero*;
- $\begin{array}{rcl} \overline{s} : \mathbb{N}_0 & \rightarrow & \mathbb{N}_0 \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ é a função de *sucessor* em $\mathbb{N}_0$;
- $\begin{array}{rcl} \overline{+} : \ \mathbb{N}_0^2 & \rightarrow & \mathbb{N}_0 \\ (n,m) & \mapsto & n+m \end{array}$ é a função de *adição* em $\mathbb{N}_0$;
- $\begin{array}{rcl} \overline{\times} : \ \mathbb{N}_0^2 & \rightarrow & \mathbb{N}_0 \\ (n,m) & \mapsto & n \times m \end{array}$ é a função de *multiplicação* em $\mathbb{N}_0$;
- $\overline{=}$ é a relação $\{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, de *igualdade* em $\mathbb{N}_0$;
- $\overline{<}$ é a relação $\{(n,m) \in \mathbb{N}_0^2 \mid n < m\}$, de *inferioridade* em $\mathbb{N}_0$.

Então, E_{Arit} é uma L_{Arit}-estrutura.

Definição

Uma *L-estrutura* é um par $E = (D, \overline{\ })$ onde:

1. D é um conjunto não vazio, chamado o *domínio* de E e notado por $dom(E)$;
2. $\overline{\ }$ é uma função de domínio $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, chamada a *função interpretação* de E, tal que:
   - a cada constante $c \in \mathcal{F}$ de L, $\overline{\ }$ faz corresponder um elemento $\overline{c}$ de D;
   - a cada símbolo de função $f \in \mathcal{F}$ de L, de aridade $n \geq 1$, $\overline{\ }$ faz corresponder uma função n-ária $\overline{f} : D^n \longrightarrow D$;
   - a cada símbolo de relação $R \in \mathcal{R}$ de L, de aridade n, $\overline{\ }$ faz corresponder uma relação n-ária $\overline{R} \subseteq D^n$.

   Para cada símbolo $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, $\overline{s}$ chama-se a *interpretação* de s em E.

Exemplo 2

É também uma L_{Arit}-estrutura o par $(\{0,1\}, \overline{\ })$, em que:

- $\overline{0} = 0$;
- $\begin{array}{rcl} \overline{s} : \{0,1\} & \rightarrow & \{0,1\} \ ; \\ 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 0 \end{array}$
- $\begin{array}{rcl} \overline{+} : \ \{0,1\}^2 & \rightarrow & \{0,1\} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \end{array}$;
- $\begin{array}{rcl} \overline{\times} : \ \{0,1\}^2 & \rightarrow & \{0,1\} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x = y = 1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases} \end{array}$;
- $\overline{=}$ é a relação $\{(0,0),(1,1)\}$;
- $\overline{<}$ é a relação $\{(0,1)\}$.

Definição

Seja $E = (D, \overline{\ })$ uma L-estrutura. Uma *atribuição em E* é uma função
$$a : \mathcal{V} \longrightarrow D,$$
do conjunto $\mathcal{V}$ das variáveis para o domínio D da L-estrutura E.

Exemplo

A função
$$\begin{array}{rcl} a^{ind} : \mathcal{V} & \rightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x_i & \mapsto & i \end{array}$$
é uma atribuição na L_{Arit}-estrutura $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{\ })$.

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{\ })$ e seja $t \in \mathcal{T}_L$ um L-termo.

O *valor de t para a atribuição a*, denotado por $t[a]_E$ ou simplesmente por $t[a]$ (quando não há dúvidas quanto à L-estrutura em causa), é o elemento de D definido, por recursão estrutural em t, como:

1. Para cada $x \in \mathcal{V}$, $x[a] = a(x)$;
2. Para cada $c \in \mathcal{C}$, $c[a] = \overline{c}$;
3. Para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para todos os $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$,
   $$f(t_1, \ldots, t_n)[a] = \overline{f}(t_1[a], \ldots, t_n[a]).$$

Proposição

Seja t um L-termo e sejam a_1 e a_2 duas atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{\ })$. Se $a_1(x) = a_2(x)$ para toda a variável $x \in \mathrm{VAR}(t)$, então $t[a_1] = t[a_2]$.

Demonstração.

Por indução estrutural em t.

1. Caso $t = x_i \in \mathcal{V}$. Então, $x_i \in \mathrm{VAR}(t)$. Logo, por hipótese, $a_1(x_i) = a_2(x_i)$. Assim,
   $$\begin{array}{rcll} t[a_1] & = & x_i[a_1] & \\ & = & a_1(x_i) & \text{por } (*) \\ & = & a_2(x_i) & \\ & = & x_i[a_2] & \text{por } (*) \\ & = & t[a_2]. & \end{array}$$
   (*) Definição de valor de um termo para uma atribuição.
2. Caso $t = c \in \mathcal{C}$. Então,
   $$\begin{array}{rcll} t[a_1] & = & c[a_1] & \\ & = & \overline{c} & \text{por } (*) \\ & = & c[a_2] & \text{por } (*) \\ & = & t[a_2]. & \end{array}$$
3. Caso $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, onde $f \in \mathcal{F}_L$ é um símbolo de função de aridade $n \geq 1$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$. Então,
   $$\begin{array}{rcll} t[a_1] & = & f(t_1, \ldots, t_n)[a_1] & \\ & = & \overline{f}(t_1[a_1], \ldots, t_n[a_1]) & \text{por } (*) \\ & = & \overline{f}(t_1[a_2], \ldots, t_n[a_2]) & \\ & & \text{por H.I., pois } \mathrm{VAR}(t_i) \subseteq \mathrm{VAR}(t) & \\ & = & f(t_1, \ldots, t_n)[a_2] & \text{por } (*) \\ & = & t[a_2]. & \end{array}$$

□

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{\ })$, seja x_i uma variável e seja $d \in D$. Denotamos por $a\binom{x_i}{d}$ a atribuição

$$\begin{array}{rcl} a\binom{x_i}{d} : \mathcal{V} & \rightarrow & D \\ x_j & \mapsto & \begin{cases} d & \text{se } i = j \\ a(x_j) & \text{se } i \neq j \end{cases} \end{array}$$

Proposição

Sejam t e u dois L-termos, seja x uma variável e seja a uma atribuição numa L-estrutura. Então $t[u/x][a] = t[a\binom{x}{u[a]}]$.

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{\ })$ e seja $\varphi \in \mathcal{F}_L$ uma L-fórmula.

O *valor lógico de φ para a atribuição a*, denotado por $\varphi[a]_E$ ou simplesmente por $\varphi[a]$ (quando não há dúvidas quanto à L-estrutura em causa), é o elemento do conjunto $\{0,1\}$ definido, por recursão estrutural em φ, como:

a) $\bot[a] = 0$;

b) Para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todos os $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$R(t_1, \ldots, t_n)[a] = 1 \text{ se e só se } (t_1[a], \ldots, t_n[a]) \in \overline{R};$$

c) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$, $(\neg\psi)[a] = 1 - \psi[a]$;

d) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, $(\psi \wedge \sigma)[a] = min\{\psi[a], \sigma[a]\}$;

e) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, $(\psi \vee \sigma)[a] = max\{\psi[a], \sigma[a]\}$;

f) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$,
$$(\psi \rightarrow \sigma)[a] = 0 \quad \text{se e só se} \quad \psi[a] = 1 \text{ e } \sigma[a] = 0;$$

g) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$,
$$(\psi \leftrightarrow \sigma)[a] = 1 \quad \text{se e só se} \quad \psi[a] = \sigma[a];$$

h) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$ e cada $x \in \mathcal{V}$,
$$\begin{array}{rll} (\exists_x\psi)[a] = 1 & \text{se e só se} & \exists_{d \in D} \ \psi[a\binom{x}{d}] = 1 \\ & \text{se e só se} & max\left\{\psi[a\binom{x}{d}] \mid d \in D\right\} = 1; \end{array}$$

i) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$ e cada $x \in \mathcal{V}$,
$$\begin{array}{rll} (\forall_x\psi)[a] = 1 & \text{se e só se} & \forall_{d \in D} \ \psi[a\binom{x}{d}] = 1 \\ & \text{se e só se} & min\left\{\psi[a\binom{x}{d}] \mid d \in D\right\} = 1. \end{array}$$

Exemplo

Seja φ a seguinte L_{Arit}-fórmula
$$\forall_{x_1}(x_1 = x_0 \vee \exists_{x_2}(x_1 = s(x_2))),$$
e seja a a atribuição a^{ind} na L_{Arit}-estrutura E_{Arit}. O valor lógico de φ para a atribuição a é 1. De facto, tem-se $\varphi[a] = 1$

sse $\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0}\left((x_1 = x_0 \vee \exists_{x_2}(x_1 = s(x_2)))[a\binom{x_1}{n_1}] = 1\right)$

sse $\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0}\left((x_1 = x_0)[a\binom{x_1}{n_1}] = 1 \text{ ou } (\exists_{x_2}(x_1 = s(x_2)))[a\binom{x_1}{n_1}] = 1\right)$

sse $\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0}\left(x_1[a\binom{x_1}{n_1}] = x_0[a\binom{x_1}{n_1}] \text{ ou } \exists_{n_2 \in \mathbb{N}_0}(x_1 = s(x_2))[a\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}] = 1\right)$

sse $\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0}\left(n_1 = 0 \text{ ou } \exists_{n_2 \in \mathbb{N}_0}(x_1[a\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}] = s(x_2)[a\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}])\right)$

sse $\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0}\left(n_1 = 0 \text{ ou } \exists_{n_2 \in \mathbb{N}_0}(n_1 = \overline{s}(x_2[a\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}]))\right)$

sse $\forall_{n_1 \in \mathbb{N}_0}(n_1 = 0 \text{ ou } \exists_{n_2 \in \mathbb{N}_0}(n_1 = n_2 + 1))$.

Dado que esta última afirmação é verdadeira, deduzimos que $\varphi[a] = 1$.